Grundlagen der Optimierung

Einführende Beispiele

Beispiel 1.2 (Angebotsauswertung)
Ein Unternehmen will eine bestimmte Menge M eines Gutes einkaufen und holt dazu Angebote von n Lieferfirmen ein, von denen keine die gewünschte Gesamtmenge alleine liefern kann. Anbieter i liefert maximal m_i, wobei der Preis $f_i(x_i)$ von der Bestellmenge x_i abhängt. [f_i wird i.d.R. monoton wachsend sein und evtl. nichtlinear (konkav).] Die optimalen Einkaufsmengen x_i und die minimalen Beschaffungskosten (Optimalwert) ergeben sich durch Lösung der folgenden Optimierungsaufgabe:

Beispiel 1.3 (Transportproblem)
Eine Firma besitzt zwei Fabriken F_1, F_2 und zwölf Verkaufsstellen $V_1, \ldots, V_{12}$. Jede Fabrik F_i produziert pro Woche die Menge p_i eines bestimmten Produktes. Jede Verkaufsstelle V_j hat eine bekannte wöchentliche Nachfrage n_j an diesem Produkt, die gedeckt werden muss. Die Kosten, eine Einheit von Fabrik F_i zur Verkaufsstelle V_j zu transportieren, seien c_{ij}, und die zu transportierende Menge sei x_{ij}. Wie muss die Produktion auf die Verkaufsstellen verteilt werden, um die Transportkosten zu minimieren und die Nachfrage zu decken?

Beispiel 1.4 (Parameteridentifizierungsproblem)
Eine an einer Feder befestigte Masse bewegt sich unter dem Einfluss von Dämpfung gemäß der Differentialgleichung

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = 0.$$

In einem Experiment mit Anfangsanregung

$$y(0) = y_0, \qquad \dot{y}(0) = 0$$

soll zu verschiedenen Zeitpunkten t_i, $i = 1, \ldots, N$ die Auslenkung y_i gemessen werden. Daraus sollen bei bekannter Masse m die unbekannten Dämpfungs- und Federkonstanten (Parameter) r und k bestimmt werden.

Wir setzen $x := (r, k)^\top \in \mathbb{R}^2$. Die Lösung der Differentialgleichung zum Zeitpunkt t mit obigen Anfangsbedingungen wird mit $y(t; x)$ bezeichnet, um die Abhängigkeit von den zu bestimmenden Parametern x zu verdeutlichen. Wir formulieren folgende Aufgabe:

damit die Messwerte y_i möglichst gut die Vorhersage der Position durch das Modell $y(t_i; x)$ wiedergeben. Außerdem sollten aus physikalischen Gründen die Parameter $x \geq 0$ sein.

Motivation für diese „Methode der kleinsten Quadrate“: Sind die Messfehler in den Daten y_i unabhängig und identisch verteilt (i.i.d.) und folgen sie einer Normalverteilung, so erhält man durch Minimierung der Fehlerquadratsumme gerade den wahrscheinlichsten Parameterwert x.

Beispiel 1.5 (Projektionsaufgabe)
Zu einer abgeschlossenen konvexen Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ und einem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ suchen wir denjenigen Punkt $x \in C$, der p am nächsten liegt, also die orthogonale Projektion von p auf C. Als Optimierungsaufgabe: