Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 6. Februar 2014

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen
Übung 13

Aufgabe 36: Ableitung eines Gebietsfunktionals

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^1[0,T] \times W^{1,1}(D)$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$t \mapsto J(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

formdifferenzierbar an jeder Stelle $\Omega \subset D$ ist (vgl. Satz 15.6 für den Fall, dass f nicht von t abhängt), und bestätigen Sie die verschiedenen Darstellungen der Ableitung in (15.32) und (15.33).

Aufgabe 37: Ableitung zustandsabhängiger Gebietsfunktionale

Vergewissern Sie sich, dass die in Beispiel 15.14 angegebenen Ableitungen für die PDE aus Beispiel 15.1, d. h.

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(\kappa \nabla y\big) &= q(x) && \text{in } \Omega, \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

korrekt sind. Berechnen Sie dazu mit Hilfe der Gleichungen (15.32) und (15.33) bzw. Aufgabe 36 die *Eulerian derivative*

(a) für die Familie von Funktionalen

$$J(\Omega_t, y_t) = \int_{\Omega_t} y_t\,\mathrm{d}x \tag{15.35}$$

(b) für die Familie quadratischer Funktionale

$$J(\Omega_t, y_t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} (y_t - y_d)^2\,\mathrm{d}x \tag{15.37}$$

(c) für die Familie von Funktionalen mit festem Integrationsgebiet $\Omega_s \subset\subset \Omega$

$$J(\Omega_t, y_t) = \int_{\Omega_s} y_t\,\mathrm{d}x \tag{15.39}$$

(d) für die Familie von quadratischen Funktionalen mit festem Integrationsgebiet $\Omega_s \subset\subset \Omega$

$$J(\Omega_t, y_t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_s} (y_t - y_d)^2\,\mathrm{d}x \tag{15.41}$$

Aufgabe 38: Adjungierte Gleichung im Falle eines quadratischen Zielfunktionals

Berechnen Sie für die Familie quadratischer Funktionale

$$J(\Omega_t, y_t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} (y_t - y_d)^2 \, \mathrm{d}x$$

die Formableitung in Hadamard-Form (15.15). Führen Sie dazu eine geeignete adjungierte Gleichung ein, vgl. auch (15.43) oder (15.45).