Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 30. Januar 2014

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen

Übung 12

Aufgabe 35: Exponentieller Ansatz zum Lösen der EIT-Aufgabe

Wir betrachten wie in Übung 11, Aufgabe 34 das Beispiel 13.1. Im Gegensatz zu Übung 11, Aufgabe 34, bei der wir gesehen haben, dass der Algorithmus recht instabil ist, wollen wir nun eine (nichtlineare) Transformation $\sigma = e^\tau$ der elektrischen Leitfähigkeit untersuchen. Wir bezeichnen den gesuchten Parameter mit $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei wie bisher $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet sei, auf dem die elektrische Leitfähigkeit rekonstruiert werden soll. Wir gehen weiterhin davon aus, dass das elektrische Potential u als Zustand des Systems durch die homogene Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(e^\tau \nabla u) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ e^\tau \frac{\partial u}{\partial n} &= j_i && \text{auf } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, r, \\ e^\tau \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^r \Gamma_i. \end{aligned}$$

beschrieben wird. Dabei beschreibt j_i für $i = 1, \dots, r$ die am Rand Γ_i anliegende Elektrodenstromdichte. Beobachtet wird also wie in Beispiel 10.1

$$E\, u := \left[\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} u \, \mathrm{d}s \right]_{i=1}^r.$$

Gehen Sie dabei von 16 gleichmäßig verteilten Elektroden wie in Abbildung 13.2 aus. Außerdem sei der Nominalwert von e^τ wie in Abbildung 13.3(a) gegeben, d. h.

$$\sigma = e^\tau = \begin{cases} 11 & \text{für } x \in \Omega_1, \\ 6 & \text{für } x \in \Omega_2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Zielfunktional der diskretisierten Aufgabe lautet im Gegensatz zu dem in Übung 11, Aufgabe 34

$$\text{Minimiere} \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{S}(\exp(\boldsymbol{\tau}); \mathbf{j}) - \boldsymbol{\mu}\|^2_{\Sigma^{-1}} + \frac{\alpha}{2} \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{bg}}\|^2_{\mathbf{M}_{00}} + \beta\, \|\mathbf{M}_{00}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{bg}})\|_1$$

über $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n_{\text{cells}}}$. (Beachte, dass sich die Skalierung der Parameter α und β damit ändert.)

(a) Überlegen Sie sich zuerst, an welchen Stellen sich durch diese nichtlineare Transformation etwas ändert. Gehen Sie dazu Schritt für Schritt § 13 aus der Vorlesung durch. Stellen Sie anschließend die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}$ sowie ihre Adjungierte $\mathbf{J}^\circ$ als Funktionen von $\boldsymbol{\tau}$ auf.

(b) Gehen Sie entweder von dem Paket *EIT_Exercise.zip* oder Ihrer bestehenden Implementierung aus und erweitern bzw. verändern Sie Ihren Code insofern, dass er mit τ anstelle von σ arbeitet.

(c) Lösen Sie die Aufgabe für den experimentellen Aufbau, bei dem jeweils zwischen zwei benachbarten Elektroden ein Strom fließt für $\alpha = 100$ und $\beta = 100$ und vergleichen Sie die Iterationszahlen sowie die Rechenzeit mit der Variante aus Übung 11, Aufgabe 34.

(d) Stellen Sie die Singulärwerte der Jacobimatrix $\widetilde{\mathbf{J}}$ in der Lösung $\boldsymbol{\tau}$ grafisch dar.

(e) Lösen Sie die Aufgabe für den Aufbau, dass der Abstand der Elektroden, über die ein Strom eingeprägt wird, $d = 4$ beträgt.