Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 23. Januar 2014

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen

Übung 11

Aufgabe 34: Elektrische Impedanz-Tomografie

Wir betrachten in dieser Aufgabe Beispiel 13.1. Dazu seien wie in der Vorlesung $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, dessen elektrische Leitfähigkeit $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^+$ rekonstruiert werden soll. Wir gehen davon aus, dass das elektrische Potential u als Zustand des Systems durch die homogene Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= j_i && \text{auf } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, r, \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \Gamma_i. \end{aligned}$$

beschrieben wird. Dabei beschreibt j_i für $i = 1, \dots, r$ die am Rand Γ_i anliegende Elektrodenstromdichte. Beobachtet wird also wie in Beispiel 10.1

$$E\, u := \left[\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} u \, \mathrm{d}s \right]_{i=1}^{r}.$$

Gehen Sie dabei von 16 gleichmäßig verteilten Elektroden wie in Abbildung 13.2 aus. Außerdem sei der Nominalwert von σ wie in Abbildung 13.3(a) gegeben, d. h.

$$\sigma = \begin{cases} 11 & \text{für } x \in \Omega_1, \\ 6 & \text{für } x \in \Omega_2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Zielfunktional der diskretisierten Aufgabe lautet

$$\text{Minimiere} \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{j}) - \boldsymbol{\mu}\|^2_{\Sigma^{-1}} + \frac{\alpha}{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{bg}}\|^2_{\mathbf{M}_{00}} + \beta \, \|\mathbf{M}_{00}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{bg}})\|_1$$

über $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{n_{\text{cells}}}$.

(a) Laden Sie sich das Paket *EIT_Exercise.zip* von der Homepage zur Vorlesung herunter und studieren Sie die Routine `solve_EIT_sparse.m` inklusive ihrer Subroutinen.

(b) Lösen Sie die Aufgabe für den experimentellen Aufbau, bei dem jeweils zwischen zwei benachbarten Elektroden ein Strom fließt für $\alpha = 100$ und $\beta = 100$.

(c) Stellen Sie die Singulärwerte der Jacobimatrix $\widetilde{J}(\sigma)$ in der Lösung σ grafisch dar. Beachten Sie, dass die Singulärwerte von $\widetilde{J}$ die Eigenwerte von $\widetilde{J}\widetilde{J}^{\circ}$ sind.

(d) Modifizieren Sie den Code insofern, dass Sie den Abstand der Elektroden, über die ein Strom eingeprägt wird, als zusätzliche Variable d mit aufnehmen. (Sinnvolle Werte sind $d = 1, \ldots, 8$.)

(e) Lösen Sie die Aufgabe für $d = 8$, d. h. für den Fall gegenüberliegender Elektroden, stellen Sie die Singulärwerte der Jacobimatrix $\widetilde{J}(\sigma)$ grafisch dar und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen aus Teil (c).