
Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen

Übung 10

Aufgabe 33: Intervallschätzer

Wir betrachten die stationäre Wärmeleitungsgleichung aus Beispiel 10.1, also

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\kappa \nabla \boldsymbol{T}) &= q && \text{in } \Omega \\ \kappa \frac{\partial}{\partial n} \boldsymbol{T} + \alpha \boldsymbol{T} &= \alpha T_\infty && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (1)$$

mit dem Ansatz

$$q(x) = \sum_{j=1}^n p_j \chi_{\Omega_j}(x) \quad \text{in } \Omega,$$

bekanntem Wärmeleitkoeffizienten κ , bekanntem Wärmeübergangskoeffizienten α und bekannter Außentemperatur T_∞ . Unsere Modellfunktion ist die Lösungsabbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (p, T_\infty) \mapsto \boldsymbol{T} = G(p; T_\infty) \in H^1(\Omega)$$

des elliptischen Randwertproblems (1). Die Messung wird wie in der Vorlesung durch r gleichmäßig über den Rand verteilte Temperatursensoren vorgenommen. Es ergibt sich der lineare und beschränkte Beobachtungsoperator $E : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^r$, also

$$E \boldsymbol{T} := \left[\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{T} \, ds \right]_{i=1}^r.$$

- (a) Erzeugen Sie eine Routine, die zu einer gegebenen Punktschätzung auch die Konfidenzellipsen zur Randverteilung der Parameter p_1 und p_2 für Konfidenzniveaus $\alpha \in \{0.5, 0.75, 0.95\}$ darstellt, vgl. § 11.3 im Vorlesungsskript.

Hinweis: Die benötigten Werte der inversen Chi-Quadrat-Verteilung lauten:

$$\Phi_{\chi_n^2}^{-1}(0.5) = 1.1774^2, \quad \Phi_{\chi_n^2}^{-1}(0.75) = 1.6651^2, \quad \Phi_{\chi_n^2}^{-1}(0.95) = 2.4477^2.$$

- (b) Zusätzlich zu den Randbeobachtungen steht nun noch eine Gebietsbeobachtung zur Verfügung. Diese misst die Wärmeenergie

$$[E \boldsymbol{T}]_{r+1} := \int_{\Omega} \boldsymbol{T} \, dx.$$

Erweitern Sie Ihr Modell insoweit, dass Sie die zusätzliche Information zur Verbesserung der Schätzung verwenden. Gehen Sie wieder von Messfehlern mit Verteilung $\mathcal{N}_{r+1}(0, \Sigma)$ mit $\Sigma = \sigma I$ und $\sigma = 0.1$ aus.

- (c) Untersuchen Sie, inwieweit die Hinzunahme der Wärmeenergiebeobachtung die Varianz der Schätzung beeinflusst. Werten Sie dazu die in Aufgabe Übung 8, Aufgabe 29 betrachteten Kriterien aus und vergleichen Sie diese mit denen ohne zusätzliche Gebietsbeobachtung.