Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 9. Januar 2014

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen

Übung 9

Aufgabe 30: Minimum-Norm-Lösung einer quadratischen Optimierungsaufgabe

Zeigen Sie, dass

$$p^\dagger = J^\circ \Sigma^{-1/2} \big(\Sigma^{-1/2} J\, J^\circ \Sigma^{-1/2}\big)^{-1} \Sigma^{-1/2}\, b = J^\circ \big(J\, J^\circ\big)^{-1} b \tag{12.7}$$

die Lösung der Aufgabe

$$\text{Minimiere} \quad \frac{1}{2}\|J\, p - b\|^2_{\Sigma^{-1}}, \quad p \in P, \tag{12.5}$$

mit minimaler Norm ist. Dabei sind P ein unendlichdimensionaler Hilbertraum, $J : P \to \mathbb{R}^r$ der surjektive, linearisierte Parameter-Beobachtungsoperator, $b \in \mathbb{R}^r$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ symmetrisch positiv definit.

Aufgabe 31: Subdifferential einer Gâteaux-differenzierbaren Funktion

Beweisen Sie Lemma 12.3 aus der Vorlesung:
Sei U ein NLR und $F : U \to \mathbb{R}$ ein konvexes, eigentliches Funktional. Falls F an der Stelle u_0 Gâteaux-differenzierbar ist, dann gilt $\partial F(u_0) = \{F'_G(u_0)\}$. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 32: Subdifferential der Norm

Beweisen Sie Satz 12.4 aus der Vorlesung:
In einem NLR U gilt für das Subdifferential der Norm

$$\partial \|u\|_U = \{s \in U^* : \|s\|_{U^*} \le 1 \text{ und } \langle s, u\rangle = \|u\|_U\}.$$