Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 19. Dezember 2013

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen

Übung 8

Aufgabe 27: Beschränktheit des Beobachtungsoperators

Zeigen Sie, dass der lineare Beobachtungsoperator $E : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^r$ mit

$$E\,T := \left[\frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{\Gamma_i} T \,\mathrm{d}s\right]_{i=1}^r. \tag{10.14}$$

aus Beispiel 10.1 beschränkt und stetig ist.

Aufgabe 28: Lösbarkeit der Normalengleichung linearer KQ-Aufgaben

Wir betrachten eine lineare KQ-Aufgabe, bei der die affin-lineare Residuenfunktion durch

$$r(p) = J\,p - b,$$

gegeben ist, wobei die Jacobimatrix $J \in \mathbb{R}^{r\times n}$ konstant ist. Beweisen Sie Lemma 10.2 aus der Vorlesung:

(a) Die Normalengleichung

$$J^\top J\,p = J^\top b. \tag{10.12}$$

ist immer lösbar.

(b) Im Fall $r \geq n$ sind äquivalent:

- (i) Die Lösung ist eindeutig.
- (ii) J besitzt vollen Spaltenrang.
- (iii) $J^\top J$ ist positiv definit.

Aufgabe 29: Identifikation von Wärmequellstärken

Wir betrachten die stationäre Wärmeleitungsgleichung aus Beispiel 10.1, also

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(\kappa\nabla T\big) &= q && \text{in } \Omega \\ \kappa\frac{\partial}{\partial n}T + \alpha\,T &= \alpha\,T_\infty && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

mit dem Ansatz

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \, \chi_{\Omega_j}(x) \quad \text{in } \Omega,$$

bekanntem Wärmeleitkoeffizienten κ, bekanntem Wärmeübergangskoeffizienten α und bekannter Außentemperatur T_∞. Unsere Modellfunktion ist die Lösungsabbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (p, T_\infty) \mapsto T = G(p; T_\infty) \in H^1(\Omega)$$

des elliptischen Randwertproblems (1). Die Messung wird wie in der Vorlesung durch r gleichmäßig über den Rand verteilte Temperatursensoren vorgenommen. Es ergibt sich der lineare und beschränkte Beobachtungsoperator $E : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^r$, also

$$E\,T := \left[\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} T \,\mathrm{d}s\right]_{i=1}^{r}.$$

(a) Laden Sie sich das Paket *Heat_ Sources_ Exercise.zip* zur Identifikation der Wärmequellstärken von der Homepage und kopieren Sie die Dateien in einen eigenständigen Ordner.

(b) Studieren Sie die Bestandteile des Codes, indem Sie den Code `solve_heat_sources.m` und dessen Subroutinen Zeile für Zeile durchgehen und ausführen.

(c) Schreiben Sie ein Skript, welches den Einfluss von Messfehlern simuliert. Dabei bietet es sich an, zu Beginn des Skripts den *random seed* mittels `rng(42)` zu setzen, um bei jedem Durchlauf diesselben Resultate zu erzeugen. Gehen Sie wie in der Vorlesung von normalverteilten Messfehlern ε aus, die der Verteilung

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}_r(0, \Sigma)$$

genügen. Wir wollen weiter annehmen, dass die Messfehler unabhängig sind mit

$$\Sigma = \sigma^2 I$$

und $\sigma = 0.1$. Simulieren Sie $n = 2\,000$ Experimente, berechnen Sie anschließend die Kovarianzmatrix und vergleichen Sie die Varianzen mit denen aus der Vorlesung.

(d) Stellen Sie grafisch dar, wie sich die Anzahl der Sensoren auf die Güte der Schätzung auswirkt, indem Sie die in der Vorlesung kennengelernten Kriterien berechnen. Berechnen Sie dazu die Kovarianzmatrizen und die auf ihnen erklärten Parameter für $n \in \{4, 5, \ldots, 30\}$.

(e) Untersuchen Sie den Einfluss der Parameter α und κ auf die Güte der Parameterschätzung durch die Berechnung von Kovarianzmatrizen $C^{\alpha,\kappa}$ für ein (α, κ)–Gitter mit Werten $\alpha, \kappa = 2^i$ mit $i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Stellen Sie die Lösung grafisch dar.

(f) Inwiefern ändert sich die Güte der Schätzung durch einen stückweise konstanten Wärmeübergangskoeffizienten $\kappa = 1 \cdot \mathbf{1}_{\{x<0\}} + 2 \cdot \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$? Dazu können Sie κ als String-Formel direkt an `assema` bzw. `assemb` übergeben.