Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 12. Dezember 2013

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen

Übung 7

Aufgabe 25: Optimalsteuerung der Motor-Kühlung

Betrachten Sie die Aufgabe der optimalen Randtemperatur am Beispiel der Motorkühlung.[1]

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_{\text{Kühlung}}} (u(x) - u_d(x))^2 \,\mathrm{d}s$$

$$\text{unter} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}\big(\kappa \nabla y(x)\big) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \kappa \dfrac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha_{\text{außen}}(x)\,\big(y(x) - y_{\text{außen}}(x)\big) = 0 & \text{auf } \Gamma_{\text{außen}}, \\ y(x) = y_{\text{Brennraum}} & \text{auf } \Gamma_{\text{Brennraum}}, \\ \kappa \dfrac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha_{\text{Kühlung}}(x)\,\big(y(x) - u(x)\big) = 0 & \text{auf } \Gamma_{\text{Kühlung}} \end{cases}$$

mit den Parametern $\gamma = 10$, $y_{\text{außen}} = 50\,°\text{C}$, $y_{\text{Brennraum}} = 260\,°\text{C}$, $\alpha_{\text{außen}} = 20\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$, $\alpha_{\text{Kühlung}} = 500\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$, $\kappa = 150\,\text{W}/(\text{m}\,\text{K})$ und $u_d \equiv 90\,°\text{C}$.

(a) Laden Sie sich zuerst das Paket *Engine_ Cooling_ Exercise.zip* von der Homepage. Entpacken Sie anschließend die Matlab-Files in einen eigenständigen Ordner und testen Sie, ob die Routine `solve_engine.m` funktioniert.

(b) Machen Sie sich mit der Behandlung gemischter Randbedingungen in `Matlab` vetraut. Lesen Sie dazu die Seiten 5.10-12 in der Dokumentation zur PDE-Toolbox und schauen Sie sich an, wie dies zur Implementierung des linearisierten Steuerungs-Beobachtungs-Operators verwendet wurde. Was wären weitere Möglichkeiten, gemischte Randbedingungen zu behandeln?

(c) Erweitern Sie die Funktionalität des Codes, um folgende Aufgabe lösen zu können

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} \big(y(x) - m(y)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_{\text{Kühlung}}} (u(x) - u_d(x))^2 \,\mathrm{d}s$$

wobei $m(y)$ wieder die mittlere Temperatur über Ω_{obs} beschreibt.

[1] vgl. Übung 3, Aufgabe 8, Übung 4, Aufgabe 15 und Übung 5, Aufgabe 18

(d) Erweitern Sie die Funktionalität des Codes, um die folgende Aufgabe lösen zu können

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{\text{außen}}} \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \, \mathrm{d}s + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_{\text{Kühlung}}} (u(x) - u_d(x))^2 \, \mathrm{d}s$$

(e) **Zusatz:** Welche numerische Lösung ergibt sich für eine global konstante bzw. in jeder Kühlbohrung konstante Temperatur?

Aufgabe 26: Optimalsteuerung der Motor-Kühlung mit Steuerbeschränkungen

Betrachten Sie die Aufgabe der optimalen Motorkühlung mit Steuerbeschränkungen

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_{\text{Kühlung}}} (u(x) - u_d(x))^2 \, \mathrm{d}s$$

$$\text{unter} \quad \left\{ \begin{aligned} -\operatorname{div}\big(\kappa \nabla y(x)\big) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \kappa \frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha_{\text{außen}}(x)\,\big(y(x) - y_{\text{außen}}(x)\big) &= 0 && \text{auf } \Gamma_{\text{außen}}, \\ y(x) &= y_{\text{Brennraum}} && \text{auf } \Gamma_{\text{Brennraum}}, \\ \kappa \frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha_{\text{Kühlung}}(x)\,\big(y(x) - u(x)\big) &= 0 && \text{auf } \Gamma_{\text{Kühlung}} \end{aligned} \right.$$

$$\text{und} \quad u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \quad \text{in } \Omega$$

mit den Parametern wie in Aufgabe Aufgabe 25.

(a) Laden und entpacken Sie sich das Paket *Floor_ Heating (constrained).zip* von der Homepage. Kopieren Sie anschließend die Matlab-Files in einen eigenständigen Ordner und testen Sie, ob die Routine `solve_Fussbodenheizung_constrained.m` funktioniert.

(b) Kopieren Sie sich die benötigten Routinen zur Anwendung der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie auf die Aufgabe der optimalen Motorkühlung mit Steuerbeschränkungen in den jeweiligen Ordner.

(c) Lösen Sie obige Aufgabe mit den Steuerbeschränkungen $u_a \equiv 70\,°\text{C}$ und $u_b \equiv 110\,°\text{C}$ zu Kontrollkostenparametern $\gamma = 10^i$ mit $i \in \{1, 0, -1, -2, -3\}$.