Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 21. November 2013

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen

Übung 5

Aufgabe 16: Ableitung der L^1–Norm

Es sei $U = L^1(\Omega)$. Wie lautet die Richtungsableitung des Funktionals $F : U \to \mathbb{R}$ mit

$$F(u) := \|u\|_{L^1(\Omega)} := \int_\Omega |u| \,\mathrm{d}x$$

für $u \in U$ in Richtung $\delta u \in U$?

Aufgabe 17: Rigorose Herleitung von Optimalitätsbedingungen im affin-linearen Fall

Wiederholen Sie die rigorose Herleitung von Optimalitätsbedingungen an der Aufgabe

$$\begin{aligned}
&\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Omega_{\text{ctrl}}} u(x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&\text{unter} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla y(x)) = \chi_{\text{ctrl}}\, u(x) & \text{in } \Omega \\ \kappa \dfrac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha(x)(y(x) - y_0(x)) = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \\
&\text{und} \quad u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \quad \text{in } \Omega_{\text{ctrl}},
\end{aligned} \tag{1}$$

wobei $y_0 \in L^2(\Gamma)$ ist. Zeigen Sie also, dass die Bedingungen, die Sie in Übung 3, Aufgabe 6a formal hergeleitet haben, tatsächlich notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen sind.

Aufgabe 18: Rigorose Herleitung von Optimalitätsbedingungen bei der Motorkühlung

Wiederholen Sie die rigorose Herleitung von Optimalitätsbedingungen an der Aufgabe der Motorkühlung

$$\text{Minimiere}\quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_{\text{Kühlung}}} u(x)^2 \,\mathrm{d}s$$

$$\text{unter}\quad \begin{cases} -\operatorname{div}\big(\kappa \nabla y(x)\big) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \kappa \dfrac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha_{\text{außen}}(x)\,\big(y(x) - y_{\text{außen}}(x)\big) = 0 & \text{auf } \Gamma_{\text{außen}}, \\ y(x) = y_{\text{Brennraum}} & \text{auf } \Gamma_{\text{Brennraum}}, \\ \kappa \dfrac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha_{\text{Kühlung}}(x)\,\big(y(x) - u(x)\big) = 0 & \text{auf } \Gamma_{\text{Kühlung}}. \end{cases}$$

Aufgabe 19: Numerische Lösung der Fußbodenheizungs-Aufgabe bei eingeschränkter Steuerung

Wir wollen nochmals die Aufgabe der optimalen Temperaturquelle, jedoch nun mit eingeschränkter Steuerung auf Ω_{ctrl} betrachten, d. h.:

$$\text{Minimiere}\quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Omega_{\text{ctrl}}} u(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

$$\text{unter}\quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla y(x)) = \chi_{\text{ctrl}}\, u(x) & \text{in } \Omega \\ \kappa \dfrac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha(x)\, y(x) = 0 & \text{auf } \Gamma. \end{cases}$$

(a) Für die Implementierung bietet es sich an, eine Matrix $\mathbf{T}_{\text{ctrl}}$ zu erzeugen, die einen (kurzen) Kontrollvektor (aus Ω_{ctrl}) auf einen (langen) `P1-FEM-Vektor` abbilden. Passen Sie die Datei `setup_matrices.m` an, indem Sie die Matlab-Funktion `pdesdp.m` verwenden und berechnen Sie auf einem zweimalig verfeinerten Gitter die optimale Lösung für $y_d(x) = 20$ und $\gamma = 10^{-3}$. Die Wärmeübergangskoeffizienten werden wie in Übung 1, Aufgabe 2 gewählt, d. h. $\alpha_{\text{wall}} = 1\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$ und $\alpha_{\text{window}} = 3\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$.

(b) Berechnen Sie nun die optimale Steuerung für den Fall, dass die Temperatur der Fußbodenheizung als konstant angenommen wird.

(c) Berechnen Sie die optimale Steuerung $u \in \mathbb{R}$ für den Fall, dass die jeweilige Temperatur auf jedem Panel der Fußbodenheizung als konstant angenommen wird.

(d) Was lässt sich über die Werte der beiden Terme im Zielfunktional aussagen?