Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 7. November 2013

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen
Übung 4

Aufgabe 12: Assemblierung der Massenmatrix über Subdomains

Wir betrachten die aus der Vorlesung bekannte Wärmeleitungsgleichung am Beispiel 2.1:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\kappa\, \nabla y(x)) &= f(x) && \text{in } \Omega \\ \kappa \frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha(x)\, y(x) &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $y(x)$ die Temperatur im Punkt x und κ die Wärmeleitfähigkeit.

(a) Assemblieren Sie unter Benutzung von `assema` die Massenmatrix

$$(\mathbf{M}_{i,j}) = \int_\Omega \varphi_i\, \varphi_j \,\mathrm{d}x$$

und berechnen Sie damit den Lastvektor $\mathbf{F}$ zur rechten Seite $f(x) = 25$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Massenmatrix die thermische Energie

$$\int_\Omega y \,\mathrm{d}x.$$

der Lösung sowie die Fläche von Ω. Berechnen Sie die Fläche auch mit der Funktion `pdetrg`.

(b) Assemblieren Sie sich nun unter Zuhilfenahme Ihrer Subdomain-Listen die Massenmatrix $\mathbf{M}_{\text{obs}}$, berechnen Sie $|\Omega_{\text{obs}}|$ und

$$\int_{\Omega_{\text{obs}}} (y - y_d)^2 \,\mathrm{d}x$$

sowie

$$\int_\Omega (y - y_d)^2 \,\mathrm{d}x$$

mit $y_d = 20$ und

$$\int_{\Omega_{\text{obs}}} y \,\mathrm{d}x$$

(c) Bestimmen Sie schließlich die

$$\int_\Omega (y - m(y))^2 \,\mathrm{d}x,$$

wobei $m(y)$ die mittlere Temperatur über Ω bezeichnet.

(d) Wiederholen Sie die Berechnungen für die rechte Seite $f(x) = 50\chi_{\text{ctrl}}(x)$.

Aufgabe 13: Das Gradientenverfahren

(a) Kopieren Sie die Datei `steepest_descent_QP.m` von der Homepage in Ihren Ordner und studieren Sie diese.

(b) Stellen Sie alle benötigten Funktionen zur Verfügung, die das Verfahren für den Fall $U = L^2(\Omega)$ und $H = L^2(\Omega)$ zum Lösen der Aufgabe (2.3) der optimalen Temperaturquelle

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u(x)^2 \,\mathrm{d}x$$
$$\text{unter} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla y(x)) = u(x) & \text{in } \Omega \\ \kappa \dfrac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha(x)\, y(x) = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

mit $y_d(x) = 20$ und $\gamma = 0.1$ benötigt. Die Wärmeübergangskoeffizienten werden wie in Übung 1, Aufgabe 2 gewählt, d. h. $\alpha_{\text{wall}} = 1\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$ und $\alpha_{\text{window}} = 3\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$. Stellen Sie die Lösung grafisch dar und wiederholen Sie die Berechnung für $y_d(x) = x_1 + x_2$.

(c) Beobachten Sie für $y_d(x) = 20, \gamma = 0.1$ die benötigten Iterationszahlen des Verfahrens für mehrere uniforme Verfeinerungen. Wiederholen Sie dieses Experiment für Kontrollkostenparameter $\gamma = 10^i$ mit $i \in \{0, -1, -2, -3\}$.

Aufgabe 14: Implementierung des CG-Verfahrens

Implementieren Sie Algorithmus 9.8 in MATLAB. Orientieren Sie sich dabei an der Implementierung des Gradientenverfahrens, welche Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `steepest_descent_QP.m` finden. Führen Sie anschließend die Berechnungen wie in Aufgabe 13 aus. Vergleichen Sie insbesondere die benötigte Rechenzeiten beim Gradientenverfahren mit denen des Verfahrens der konjugierten Gradienten.

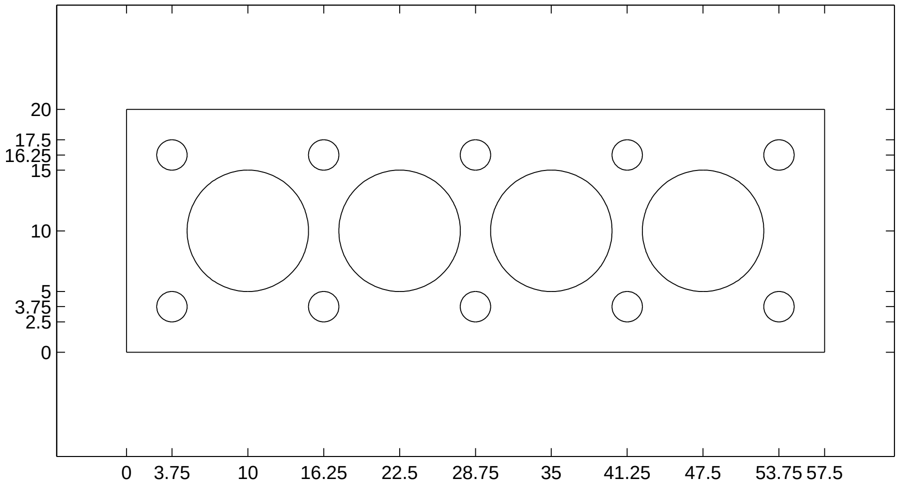
Aufgabe 15: Simulation einer Motor-Kühlung

Wir betrachten die folgende stationäre Wärmeleitungsgleichung am Beispiel 8.1 der Motor-Kühlung:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(\kappa\nabla y(x)\big) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \kappa\frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha_{\text{außen}}(x)\big(y(x) - y_{\text{außen}}(x)\big) &= 0 && \text{auf } \Gamma_{\text{außen}}, \\ y(x) &= y_{\text{Brennraum}} && \text{auf } \Gamma_{\text{Brennraum}}, \\ \kappa\frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha_{\text{Kühlung}}(x)\big(y(x) - u(x)\big) &= 0 && \text{auf } \Gamma_{\text{Kühlung}} \end{aligned} \tag{2}$$

mit den Parametern $y_{\text{außen}} = 50°\text{C}, y_{\text{Brennraum}} = 260°\text{C}, \alpha_{\text{außen}} = 20\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}), \alpha_{\text{Kühlung}} = 500\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}), \kappa = 150\text{W}/(\text{m}\,\text{K})$.

(a) Erzeugen Sie mit Hilfe der grafischen Benutzeroberfläche der MATLAB-PDE-TOOLBOX für die folgende Geometrie eines Motorblocks die Dateien `geometry_engine.m`, `bc_engine.m` und `pdemodel_engine.m`, vgl. Übung 1, Aufgabe 2.



(b) Kopieren Sie sich die Datei `setup_problem.m` von der Homepage oder aus dem Fußbodenheizungs-Ordner und passen diese an die Parameter an. Gehen Sie dabei vorerst von einer Temperatur der Kühlflüssigkeit von 50 °C aus.

(c) Erzeugen Sie sich wie schon in Übung 2, Aufgabe 5e die Funktion `pdebound_engine.m`, die diesselben Informationen wie die Datei `bc_engine.m` zur Verfügung stellt, jedoch die Daten aus `setup_problem.m` verwendet.

(d) Lösen Sie die PDE für die obige Konfiguration und stellen Sie die Lösung grafisch dar. Überzeugen Sie sich davon, dass die Randbedingungen korrekt gesetzt wurden.