Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 7. November 2013

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen

Übung 3

Aufgabe 6: Variation des Fußbodenheizungs-Beispiels

(a) Führen Sie zur Optimalsteueraufgabe

$$\begin{aligned}
&\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Omega_{\text{ctrl}}} u(x)^2 \, \mathrm{d}x \\
&\text{unter} \quad \left\{ \begin{aligned} -\operatorname{div}(\kappa \nabla y(x)) &= \chi_{\text{ctrl}}\, u(x) && \text{in } \Omega \\ \kappa \frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha(x)\,(y(x) - y_0(0)) &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \right. \\
&\text{und} \quad u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \quad \text{in } \Omega_{\text{ctrl}}.
\end{aligned}$$

die formale Lagrange-Technik aus und leiten Sie die KKT-Bedingungen, insbesondere die Gradientengleichung $\mathcal{L}_u(\cdots) = 0$ sowie die adjungierte Gleichung $\mathcal{L}_y(\cdots) = 0$ her.

(b) Was ändert sich bei Betrachtung des Zielfunktionals

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) := -\int_{\Omega_{\text{obs}}} y(x)\, \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Omega_{\text{ctrl}}} u(x)^2 \, \mathrm{d}x?$$

Aufgabe 7: Variation des Fußbodenheizungs-Beispiels mit integralen Steuerbeschränkungen

(a) Führen Sie zur Optimalsteueraufgabe

$$\begin{aligned}
&\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Omega_{\text{ctrl}}} u(x)^2 \, \mathrm{d}x \\
&\text{unter} \quad \left\{ \begin{aligned} -\operatorname{div}(\kappa \nabla y(x)) &= \chi_{\text{ctrl}}\, u(x) && \text{in } \Omega \\ \kappa \frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha(x)\,(y(x) - y_0(x)) &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \right. \\
&\text{und} \quad \int_{\Omega_{\text{ctrl}}} u(x)\, \mathrm{d}x \le u_c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

die formale Lagrange-Technik aus und leiten Sie die KKT-Bedingungen, insbesondere die Gradientengleichung $\mathcal{L}_u(\cdots) = 0$ sowie die adjungierte Gleichung $\mathcal{L}_y(\cdots) = 0$ her.

(b) Was ändert sich, wenn zusätzlich

$$u \in U_{\text{ad}} := \left\{u \in L^2(\Omega_{\text{ctrl}}) : u_a \le u \le u_b \text{ f. ü. in } \Omega_{\text{ctrl}}\right\}$$

gefordert wird?

Aufgabe 8: Formale Lagrange-Technik am Beispiel der Motor-Kühlung

Wir betrachten die Aufgabe der Motorkühlung, vgl. Beispiel 8.1.

(a) Führen Sie zur Optimalsteueraufgabe

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_{\text{Kühlung}}} u(x)^2 \,\mathrm{d}s$$

$$\text{unter} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}\big(\kappa \nabla y(x)\big) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \kappa \dfrac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha_{\text{außen}}(x)\,\big(y(x) - y_{\text{außen}}(x)\big) = 0 & \text{auf } \Gamma_{\text{außen}}, \\ y(x) = y_{\text{Brennraum}} & \text{auf } \Gamma_{\text{Brennraum}}, \\ \kappa \dfrac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha_{\text{Kühlung}}(x)\,\big(y(x) - u(x)\big) = 0 & \text{auf } \Gamma_{\text{Kühlung}}. \end{cases}$$

die formale Lagrange-Technik aus und leiten Sie die KKT-Bedingungen, insbesondere die Gradientengleichung $\mathcal{L}_u(\cdots) = 0$ sowie die adjungierte Gleichung $\mathcal{L}_y(\cdots) = 0$ her. Bestimmen Sie dazu zuerst die schwache Formulierung der PDE.

(b) Was ändert sich bei Betrachtung des Zielfunktionals

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{\text{obs}}} \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \,\mathrm{d}s + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_{\text{Kühlung}}} u(x)^2 \,\mathrm{d}s?$$

Hier ist Γ_{obs} ein Teil des Randes von Ω. Sinnvoll ist dabei $\Gamma_{\text{obs}} \cap \Gamma_{\text{Brennraum}} = \emptyset$ anzunehmen.

(c) Was ändert sich bei Betrachtung des Zielfunktionals

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} |\nabla y(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_{\text{Kühlung}}} u(x)^2 \,\mathrm{d}s?$$

Dabei soll Ω_{obs} positiven Abstand zum Rand Γ haben.

(d) Was ändert sich bei Betrachtung des Zielfunktionals

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{obs}}} \big(y(x) - m(y)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_{\text{Kühlung}}} u(x)^2 \,\mathrm{d}s,$$

wobei $m(y)$ für den Mittelwert von y über Ω_{obs} steht?

Aufgabe 9: Die Richtung des steilsten Abstiegs

Es seien U ein Hilbertraum und $f : U \to \mathbb{R}$ ein Funktional in U. Definieren Sie die Bestimmung der Richtung des steilsten Abstiegs an der Stelle $u \in U$ als eine Optimierungsaufgabe.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der formalen Lagrange-Technik, dass die Lösung dieser Aufgabe eine Richtung des negativen Gradienten $-\nabla f(u)$ ist.

(b) Verifizieren Sie die Lösung auch über der Riesz-Darstellung der Ableitung des Zielfunktionals der Optimierungsaufgabe.

Aufgabe 10: Umformung quadratischer Zielfunktionale im Hilbertraum

Es sei U ein Hilbertraum. Bringen Sie die unten angegebenen Funktionale jeweils in folgende Form

$$f(u) = \frac{1}{2}\big(Au, u\big)_U - \big(b, u\big)_U + c,$$

vgl. (9.1) aus der Vorlesung.

(a)

$$\text{Minimiere} \quad f(u) = -\int_{\Omega_{\text{obs}}} S u \,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{\Omega_{\text{ctrl}}} u^2 \,\mathrm{d}x,$$

wobei $S \in \mathcal{L}(U, H)$ ist mit $U = L^2(\Omega_{\text{ctrl}})$ und $H = L^2(\Omega_{\text{obs}})$ ist.

(b)

$$\text{Minimiere} \quad f(u) = \frac{1}{2}\|S(u) - y_d\|_H^2 + \frac{\gamma}{2}\|u\|_U^2$$

im Fall eines affin-linearen Steuerungs-Beobachtungs-Operators

$$S(u) = S_{\text{lin}} u + y_0$$

mit $S_{\text{lin}} \in \mathcal{L}(U, H)$ und $y_0 \in H$.

(c)

$$\text{Minimiere} \quad f(u) = \frac{1}{2}\|S_1 u - y_1\|_{H_1}^2 + \frac{1}{2}\|S_2 u - y_2\|_{H_2}^2 + \frac{\gamma}{2}\|u\|_U^2$$

wobei $S_1 \in \mathcal{L}(U, H_1)$, $S_2 \in \mathcal{L}(U, H_2)$, $y_1 \in H_1$, $y_2 \in H_2$ sind.

Aufgabe 11: Optimale Schrittweite im Gradientenverfahren

Es sei U ein Hilbertraum und $f : U \to \mathbb{R}$ ein quadratisches Zielfunktional der Form

$$f(u) = \frac{1}{2}\big(A\,u, u\big)_U - \big(b, u\big)_U + c$$

Bestimmen Sie die im Gradientenverfahren (Algorithmus 9.4) verwendete Schrittweite α_n durch Minimierung der reellwertigen Funktion $\alpha \mapsto f(u_n + \alpha d_n)$ mit $d_n = -\nabla f(u_n) \in U$, $d_n \neq 0$. Warum handelt es sich um ein Minimum?

Hausaufgabe 5: Adjungierter und Hilbertraum-adjungierter Operator im $\mathbb{R}^n$

Es seien $U = (\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot)_N)$ und $V = (\mathbb{R}^m, (\cdot,\cdot)_M)$ zwei Hilberträume mit Skalarprodukten, die durch die Matrizen N bzw. M dargestellt werden. Weiter sei $A \in \mathcal{L}(U, V)$ ein linearer (und stetiger) Operator, vgl. Beispiel 6.8. Berechnen Sie den adjungierten Operator S^* und den HR-adjungierten Operator S°.

Hausaufgabe 6: Ableitungen in Funktionenräumen

(a) Es sei $f : U \to V$ zwischen normierten linearen Räumen an einer Stelle $u \in U$ richtungsdifferenzierbar in eine Richtung $\delta u \in U$ bzw. Gâteaux-differenzierbar bzw. Fréchet-differenzierbar. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaften erhalten bleiben, wenn man U durch U_1 mit $U_1 \hookrightarrow U$ und V durch V_1 mit $V \hookrightarrow V_1$ ersetzt.

Kurz: Man kann im Definitionsraum immer eine stärkere und im Bildraum immer eine schwächere Norm wählen.

(b) Zeigen Sie die Aussage von Beispiel 5.4 (d): In einem HR besitzt $f(u) = \|u\|_H^2$ an der Stelle u die Fréchet-Ableitung, die über den Satz von Riesz mit $\nabla f(u) = 2\,u \in H$ identifiziert werden kann.

(c) Es sei Ω ein beschränktes Gebiet. Für welche $r \in [1, \infty]$ sind die Funktionale

$$F(u) = \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad G(u) = \int_\Omega |x|\, u^3(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $u \in L^r(\Omega)$ definiert? Für welche r sind sie jeweils von $L^r(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$ Fréchet-differenzierbar, und wie lauten die Ableitungen?

(d) Es seien U, V, W normierte lineare Räume und $F : V \to W$ und $G : U \to V$ überall Fréchet-differenzierbar. Beweisen Sie die **Kettenregel:** $F \circ G : U \to W$ ist überall Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $(F \circ G)'(u) = F'(G(u)) \circ G'(u)$.

Hausaufgabe 7: Existenz und Eindeutigkeit bei quadratischen Aufgaben im Hilbertraum

Zeigen Sie, dass die reduzierte Aufgabe

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(u) = \frac{1}{2}\big(Au, u\big)_U - \big(b, u\big)_U + c \\ \text{unter} \quad & u \in U \end{aligned}$$

unter Voraussetzung 9.2 in einem Hilbertraum U eine eindeutige Lösung besitzt.

Hausaufgabe 8: Beweis einiger Formeln zum allgemeinen quadratischen Zielfunktional im Hilbertraum

Beweisen Sie Lemma 9.3.