Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 24. Oktober 2013

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen

Übung 2

Aufgabe 3: Eigenschaften von U_{ad}

Es sei $1 \le r \le \infty$ und

$$U_{\text{ad}} := \{u \in L^r(\Omega) : u_a \le u \le u_b \text{ f. ü. in } \Omega\}$$

mit $u_a, u_b \in L^r(\Omega)$ und $u_a \le u_b$ f. ü. in Ω.

(a) Zeigen Sie, dass U_{ad} eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $L^r(\Omega)$ ist. Berechnen Sie $\sup_{u \in U_{\text{ad}}} \|u\|_{L^r(\Omega)}$.

(b) Zeigen Sie, dass U_{ad} nicht kompakt ist, falls $u_a \neq u_b$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass im Fall $r < \infty$ die Menge U_{ad} schwach kompakt ist.

Aufgabe 4: Existenz optimaler Steuerungen

Es sei $G : U = L^2(\Omega_{\text{ctrl}}) \to Y = H^1(\Omega)$ der aus der Vorlesung bekannte Steuerungs-Zustands-Operator zur PDE

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\kappa \nabla y(x)) &= \chi_{\text{ctrl}}\, u(x) && \text{in } \Omega \\ \kappa \frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha(x)\, y(x) &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Untersuchen Sie die folgenden Optimalsteueraufgaben hinsichtlich Existenz einer Lösung. Definieren Sie sich in jedem Fall einen passenden Steuerungs-Beobachtungs-Operator S und versuchen Sie jeweils, die Argumente von Theorem 3.6 aus der Vorlesung anzupassen, bzw. begründen Sie, warum keine Lösung der Aufgabe existiert.

(a) Minimierung der quadratischen Abweichung zu einem gewünschten Zustand unter Box-Beschränkungen

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\text{obs}}} (y - y_d)^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{unter (1)} \\ \text{sodass} \quad & u_a \le u \le u_b \quad \text{f. ü. in } \Omega \end{aligned}$$

(b) Minimierung der absoluten Abweichung zu einem gewünschten Zustand unter Box-Beschränkungen

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \int_{\Omega_{\text{obs}}} |y - y_d| \, \mathrm{d}x \quad \text{unter (1)} \\ \text{sodass} \quad & u_a \le u \le u_b \quad \text{f. ü. in } \Omega \end{aligned}$$

(c) Minimierung der quadratischen Abweichung zu einem gewünschten Zustands-Steuerungs-Paar (mit $\gamma \ge 0$)

$$\text{Minimiere} \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\text{obs}}} (y - y_d)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega_{\text{ctrl}}} (u - u_d)^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{unter (1)}$$

(d) Maximierung der Energie mit quadratischem Kontrollkostenterm (mit $\gamma > 0$)

$$\text{Minimiere} \quad -\int_{\Omega_{\text{obs}}} y \, \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega_{\text{ctrl}}} u^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{unter (1)}$$

(e) Minimierung der quadratischen Abweichung des Gradienten des Zustands mit quadratischem Kontrollkostenterm (mit $\gamma \ge 0$)

$$\text{Minimiere} \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\text{obs}}} (\nabla y - g_d)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega_{\text{ctrl}}} u^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{unter (1)}$$

(f) Maximierung der quadratischen Abweichung zu einem unerwünschten Zustand

$$\text{Minimiere} \quad -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\text{obs}}} (y - y_d)^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{unter (1)}$$

(g) Maximierung der quadratischen Abweichung zu einem unerwünschten Zustand mit quadratischem Kontrollkostenterm (mit $\gamma > 0$)

$$\text{Minimiere} \quad -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\text{obs}}} (y - y_d)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega_{\text{ctrl}}} u^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{unter (1)}$$

(h) Minimierung der quadratischen Abweichung zur mittleren Temperatur mit quadratischem Kontrollkostenterm ($\gamma \ge 0$)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\text{obs}}} (y - m(y))^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega_{\text{ctrl}}} (u - u_d)^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{unter (1)} \\ \text{wobei} \quad & m(y) = \frac{1}{|\Omega_{\text{obs}}|} \int_{\Omega_{\text{obs}}} y \, \mathrm{d}x \text{ ist} \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Simulation des Fußbodenheizungs-Beispiels

Wir betrachten die aus der Vorlesung bekannte Wärmeleitungsgleichung am Beispiel 2.1:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\kappa\, \nabla y(x)) &= f(x) \quad && \text{in } \Omega \\ \kappa \frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha(x)\, y(x) &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $y(x)$ die Temperatur im Punkt x. Wir setzen wie in Aufgabe Aufgabe (noch nicht gestellt): OSPDE165 $\alpha_{\text{wall}} = 1\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$ und $\alpha_{\text{window}} = 3\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$. Desweiteren sei die Wärmeleitfähigkeit $\kappa = 20\text{W}/(\text{m}\,\text{K})$ konstant in Ω.

(a) Kopieren Sie die Datei `setup_problem.m` von der Homepage in Ihren Ordner `Fussbodenheizung`. Passen Sie die Datei so an, dass sie zu Ihrer Geometrie passt. Dazu sollten Sie sich mit Hilfe der GUI die verschiedenen Labels der Kanten und Subdomains anzeigen lassen. Dabei können Sie die GUI mit dem letzten gespeicherten Stand Ihres Modells (Übung 1, Aufgabe 2) direkt mittels `pdemodel_Fussbodenheizung` aus der Matlab-Konsole aufrufen.

(b) Assemblieren Sie unter Benutzung von `assema` und `assemb` die Steifigkeitsmatrix zur obigen PDE. Überprüfen Sie die Besetzungsstruktur (mittels `spy`) sowie weitere Eigenschaften wie Symmetrie und positive Definitheit.

(c) Assemblieren Sie mit `assema` den zu $f \equiv 50$ gehörenden Lastvektor. Lösen Sie die PDE und stellen Sie den Zustand y mittels `pdeplot` dar. Überprüfen Sie Ihre Lösung anhand der Lösung, die Sie direkt in der GUI berechnen können. Kopieren Sie sich anschließend die Dateien `plot_state.m`, `plot_boundary_data.m` und `plot_subdomains.m` von der Homepage. Stellen Sie den Zustand mit Hilfe von `plot_state` erneut dar, und studieren Sie den Quellcode.

(d) Wiederholen Sie Teil (c) mit der rechten Seite $f(x) = 100\,\chi_{\text{ctrl}}(x)$. (Zur bequemen Darstellung von $f(x)$ nutzen Sie am besten eine *subdomain expression* wie `'100!0!100'`).

(e) Bisher haben wir die Randbedingungen über die mittels `wbound` erzeugte Datei `bc_Fussbodenheizung.m` gesetzt. Diese basiert letztlich auf den in der GUI angegebenen Daten. Für mehr Flexibilität benutzt man besser eine benutzerdefinierte Funktion, die die Randbedingungen setzt. Lesen Sie dazu die Dokumentation zum Thema `pdebound`, die Sie durch `doc pdebound` aufrufen können. Schreiben Sie eine solche Funktion `pdebound_Fussbodenheizung.m`, die die in `setup_problem.m` spezifizierten Werte für den Wärmeübergangsparameter α verwendet. Eine Vorlage findet sich in der Dokumentation zu `pdebound` unter dem Stichwort Boundary Conditions for Scalar PDE. Wiederholen Sie Teil (c) und (d) unter Benutzung Ihrer neuen Funktion `pdebound_Fussbodenheizung.m` bei der Assemblierung, und stellen Sie sicher, dass Sie dieselbe Lösung erhalten.

Hausaufgabe 3: Minimierer konvexer Funktionale

(a) Es sei U ein normierter linearer Raum, $U_{\text{ad}} \subset U$ konvex und $f : U_{\text{ad}} \to \mathbb{R}$ strikt konvex. Weiter sei $\bar{u} \in U_{\text{ad}}$ ein globales Minimum der Aufgabe

$$\text{Minimiere } f(u) \text{ unter } u \in U_{\text{ad}},$$

d.h., $f(\bar{u}) = \inf_{u \in U_{\text{ad}}} f(u)$. Zeigen Sie: $\bar{u}$ ist eindeutig bestimmt.

(b) Es seien U und H Hilberträume, $y_d \in H$, $S \in \mathcal{L}(U, H)$ und $\lambda \geq 0$. Beweisen Sie, dass das Funktional

$$f(u) = \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_H^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2$$

konvex und im Fall $\lambda > 0$ sogar gleichmäßig konvex ist.

Hausaufgabe 4: Affin linearer Steuerungs-Zustands-Operator

Beweisen Sie Satz 3.6 (Abstrakte Aufgabe im Hilbertraum: Existenz und Eindeutigkeit) für den Fall, dass $S : U \to H$ *affin-linear* ist.