Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 17. Oktober 2013

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen

Übung 1

Aufgabe 1: Erste Schritte mit der Matlab-PDE-Toolbox

Ziel der Aufgabe soll es sein, sich mit den Funktionalitäten der grafischen Benutzeroberfläche der MATLAB-PDE-TOOLBOX vertraut zu machen. Deren grafische Oberfläche kann mittels `pdetool` aus der Matlab-Konsole aufgerufen werden.

(a) Machen Sie sich mit den Funktionen GRID, GRID SPACING und SNAP vertraut und erzeugen Sie einen Einheitskreis.

(b) Finden Sie heraus, welche PDE in der Standardeinstellung gelöst wird. Wechseln Sie dazu in den BOUNDARY MODE und in den PDE MODE.

(c) Erzeugen Sie ein Gitter auf dem Einheitskreis und verfeinern Sie dieses zweimal.

(d) Lösen Sie die PDE mittels SOLVE PDE.

(e) Ändern Sie nun die Randbedingungen im BOUNDARY MODE in homogene Neumann-Randbedingungen und lösen die veränderte Gleichung.

(f) Welche Lösung ergibt sich mit homogenen Neumann-Randbedingungen? Interpretieren Sie das Ergebnis.

(g) Wir betrachten nun die PDE

$$
\begin{aligned}
-\triangle y &= f \quad \text{in } \Omega \\
\frac{\partial}{\partial n} y + y &= 0 \quad \text{auf } \Gamma.
\end{aligned}
$$

Lösen Sie diese inhomogene Poisson-Gleichung mit rechter Seite $f(x) = \sin(\pi(x_2 - 2x_1))$. Experimentieren Sie mit den verschiedenen Plot-Routinen zur Darstellung der Lösung.

Aufgabe 2: Simulation des Fußbodenheizungs-Beispiels

Wir betrachten die aus der Vorlesung bekannte Wärmeleitungsgleichung am Beispiel 2.1:

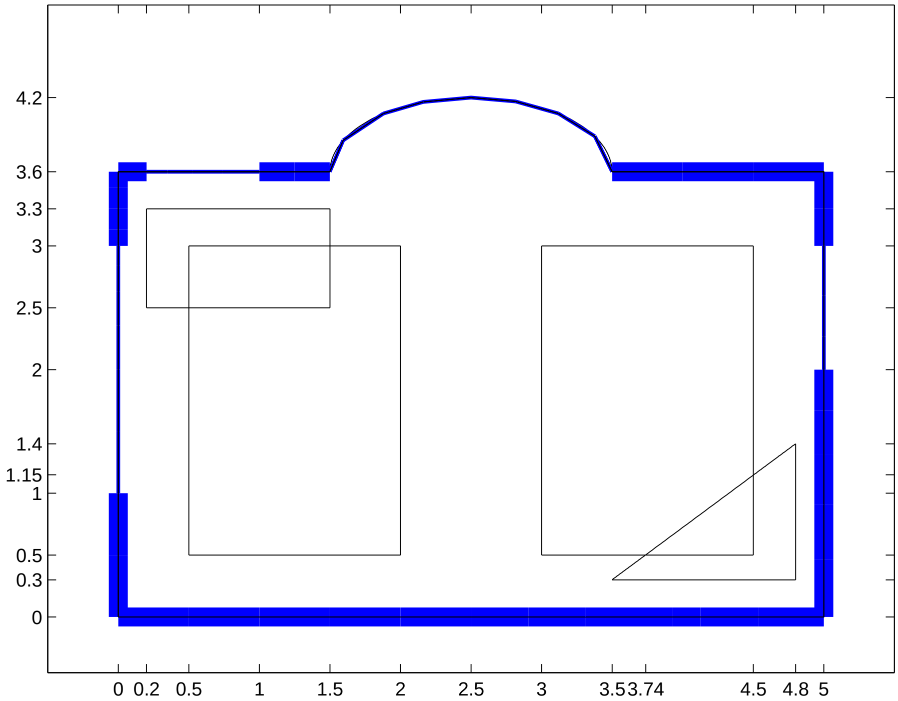
$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}(\kappa \nabla y(x)) &= \chi_{\text{ctrl}}\, u(x) && \text{in } \Omega \\
\kappa \frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha(x)\, y(x) &= 0 && \text{auf } \Gamma.
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnet $y(x)$ die Temperatur im Punkt x, κ die in diesem Fall konstante Wärmeleitfähigkeit und $\alpha(x)$ den Wärmeübergangskoeffizienten. Die Steuerung $u(x)$ bezeichnet die Wärmeleistungsdichte im Punkt x.

Hinweis: Es bietet sich an, für jedes Beispiel einen Unterordner, hier zum Beispiel mit der Bezeichnung `Fussbodenheizung`, anzulegen, in dem sich die problemspezifischen Programmteile befinden.

Benutzen Sie die PDE-Toolbox von Matlab für folgende Aufgaben:

(a) Konstruieren Sie mit Hilfe der GUI die folgene Geometrie. Stellen Sie dabei sicher, dass Ω_{obs}, Ω_{ctrl} und alle Fenster als eigenständige Geometrieteile erstellt und dargestellt werden:



Hinweis: Es bietet sich an, Achsen und Ticks vorher gemäß der Achsenbezeichung einzustellen, um mit dem Grid Snapping arbeiten zu können.

(b) Was sagen die durch Draw ≫ Export Geometry Description, Set Formula, Labels erzeugten Variablen aus?

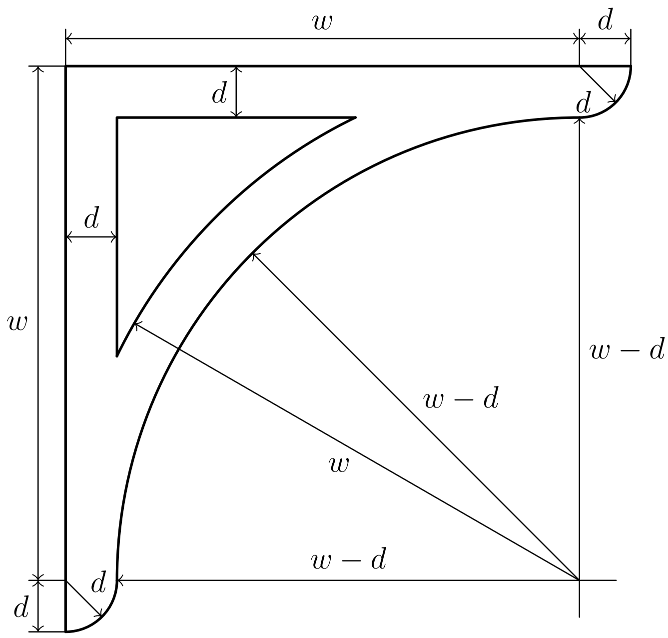
(c) Setzen Sie im Boundary Mode homogene Robin-Randbedingungen mit Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_{\text{wall}} = 1\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$ und $\alpha_{\text{window}} = 3\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$ an den Außenkanten der Geometrie. Entfernen Sie auch alle überflüssigen inneren Kanten.

(d) Exportieren sie mittels Boundary ≫ Export Decomposed Geometry, Boundary Cond's die Matrizen `g` und `b`. Erzeugen Sie außerdem in der Matlab-Konsole mit `wgeom` die Datei `geometry_Fussbodenheizung.m` sowie mit `wbound` die Datei `bc_Fussbodenheizung.m`.

(e) Speichern Sie das Modell mit Save As unter `pdemodel_Fussbodenheizung.m` und kommentieren Sie diese. (Das Speichern des Modells dient nur dem Zweck der späteren Weiterbearbeitung in der GUI.)

Hausaufgabe 1: Simulation des Bookshelf-Beispiels

(a) Nutzen Sie die GUI der Matlab-PDE-Toolbox und erzeugen Sie folgende Geometrie für die Parameter $w = 10$ und $d = 1$.



(b) Lösen Sie auf diesem Gebiet folgende partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\triangle\, y(x) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ y(x) &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_{\text{left}} \\ \frac{\partial}{\partial n} y(x) &= 1 \quad \text{auf } \Gamma_{\text{top}} \\ \frac{\partial}{\partial n} y(x) &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \setminus (\Gamma_{\text{top}} \cup \Gamma_{\text{left}}). \end{aligned}$$

Stellen Sie die Lösung mitsamt einiger Konturlinien dar.

Hausaufgabe 2: Studium der PDE-Toolbox-Dokumentation

(a) Lesen Sie den Abschnitt **Solve PDEs Programmatically**, Seite 3–107 bis 3–112, im Partial Differential Equation Toolbox User's Guide.

(b) Machen Sie sich mit der Matlab-FEM-Syntax vertraut. Lesen Sie dazu die den Anfang des Kapitels **Finite Element Method**, Seite 5–1 bis 5–9.

(c) Studieren Sie die Hilfeseiten der Toolbox (`doc pde`). Sie benötigen in jedem Fall die Befehle `initmesh`, `assema`, `assemb`, `pdeplot` und `refinemesh`. Dabei sollten sie sich insbesondere mit dem Gitterformat `[p,e,t]` vertraut machen.