

Computerpraktikum

Berechnung von Picard-Fuchs Differentialgleichungen

Es sei $f_\lambda(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ein homogenes Polynom in den Variablen x_0, \dots, x_3 , das polynomiell von einem Parameter λ abhängt. Bezeichnen wir mit $S_\lambda \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ die Nullstellenmenge von f_λ , dann ist bekannt, dass für jeden Zykel γ auf S_λ das Periodenintegral

$$\pi(\lambda) = \int_{\gamma} \omega_\lambda$$

über eine fixierte holomorphe Volumenform ω_λ auf S_λ einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$c_k(\lambda) \frac{d^k}{d\lambda^k} \pi(\lambda) + \dots + c_0(\lambda) \pi(\lambda) = 0 \quad (0.1)$$

genügt. Die Werte von π tragen wichtige topologische, geometrische und auch arithmetische Information und sind im Allgemeinen schwierig zu berechnen. Deswegen berechnet man

1. spezielle Werte $\pi(\lambda_0)$, die einfach zu berechnen sind,
2. Die Differentialgleichung (0.1) und
3. numerisch die Werte $\pi(\lambda)$ durch Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems.

In dieser Aufgabe soll ein Algorithmus programmiert werden, der ausgehend von f_λ die Differentialgleichung (0.1) mit Hilfe eines Computeralgebrasystems berechnet. Schritte 1. und 3. können in der Regel mit Hilfe von Allzweckprogrammen gelöst werden, für Schritt 2. ist es ratsam, spezielle Programme wie Singular [DGPS16] oder Macaulay2 [GS] zu verwenden.

Die Ergebnisse sollen in einem Aufsatz zusammengefasst werden, welcher auch die theoretischen Grundlagen und eine Dokumentation der Programme beinhalten soll. Die genauen Daten für die Aufgabenstellung sind beim Betreuer zu erfragen. Für die theoretischen Grundlagen verweisen wir auf die Arbeiten [Gri69], [Mor92] sowie [Leh17].

Betreuer:

Christian Lehn

Reichenhainer Straße 39, Raum 613

09126 Chemnitz

Telefon: +49 371 531 30 391

Email: vorname.name@mathematik.tu-chemnitz.de

Literatur

- [DGPS16] Wolfram Decker, Gert-Martin Greuel, Gerhard Pfister, and Hans Schönemann. SINGULAR 4-1-0 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de>, 2016.
- [Gri69] Phillip A. Griffiths. On the periods of certain rational integrals. I, II. *Ann. of Math. (2)* 90 (1969), 460-495; *ibid.* (2), 90:496-541, 1969.
- [GS] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at <https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/>.
- [Leh17] Christian Lehn. Skript Perioden, 2017.
- [Mor92] David R. Morrison. Picard-Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces. In *Essays on mirror manifolds*, pages 241-264. Int. Press, Hong Kong, 1992.