Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, Dr. M. Winkler

Chemnitz, 18. Juni 2018
Abgabe am 2. Juli 2018

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 10

Aufgabe 23: Implementierung der Finite-Elemente-Methode

Lade die Dateien `area_integrator.m`, `lshapeg.m`, `polyg.m`, `quadrature_unit_triangle_area.m`, `test_FEM.m` von der Webseite der Lehrveranstaltung herunter.

(a) Vervollständige die Implementierung von `area_integrator.m`, insbesondere die Assemblierung der Steifigkeitsmatrix A und des Lastvektors F. Vergleiche dazu die Implementierung aus Übung 9, Aufgabe 22 (c).

(b) Löse die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -a_{11}\, D_1^2 u - a_{22}\, D_2^2 u + c\, u &= f \quad \text{in } \Omega = (-1,1)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für verschiedene Parameter $a_{11}, a_{22}, c \geq 0$.

(c) Löse die oben genannte partielle Differentialgleichung auf einer Folge von Netzen $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, mit maximalen Elementdurchmesser $h_i \to 0$ für $i \to \infty$. Um den Fehler der Näherungslösung zu bestimmen können die Koeffizienten der Finite-Elemente-Funktionen auf das verfeinerte Netz wie folgt prolongiert werden:

```
% Assume that 'u' is the coefficient vector associated
% with the finite element 'fe' on the mesh 'mesh'.

% Refine the mesh
[fine_mesh, P] = myrefinemesh( mesh, fe );

% Prolongate the solutions to the new mesh
v = P * u;

% Now, 'v' is the coefficient vector of the same
% function on the finer mesh 'fine_mesh'
```

Der $H^1(\Omega)$-Fehler der Lösung auf dem groben Gitter kann nun approximiert werden, indem man die Distanz zur Lösung auf dem sehr feinen Netz berechnet. Finde

dazu eine geeignete Darstellung des Fehlers unter Verwendung der Steifigkeits- und Massenmatrix und implementiere diese. Führe für die Gebiete $\Omega = (-1,1)^2$ und $\Omega = (-1,1)^2 \setminus [0,1]^2$ eine Fehleranalyse durch. Berechne auch die experimentellen Konvergenzraten mit der Formel

$$\operatorname{eoc}(\|u - u_{h_i}\|_{H^1(\Omega)}) := \frac{\log\left(\|u - u_{h_i}\|_{H^1(\Omega)} / \|u - u_{h_{i-1}}\|_{H^1(\Omega)}\right)}{\log(h_i/h_{i-1})}, \quad i = 2, 3, \ldots.$$

(d) Implementiere eine Möglichkeit um Dirichlet-Randbedingungen einzubauen und löse die partielle Differentialgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen.