Numerik partieller Differentialgleichungen
Übung 9

Aufgabe 22: Implementierung finiter Elemente

Lade die Dateien `area_integrator.m`, `affine_transformation.m`, `FE_Lagrange_1.m`, `myinitmesh.m`, `myrefinemesh.m`, `plot_function.m`, und `setupmesh.m` von der Webseite herunter.

(a) Erzeuge eine Triangulierung des Einheitsquadrats mit der Funktion

```
mesh = myinitmesh('squareg', 'hmax', 1.5);
```

Das Gitter kann mit dem Befehl "`pdemesh(mesh.p, mesh.be, mesh.t)`" gezeichnet und die Gitterkomponenten mit "`mesh.p`", "`mesh.e`" und "`mesh.t`" abgerufen werden. Machen Sie sich mit der Struktur des Gitters vertraut. Lese dazu "`help myinitmesh`" und "`help initmesh`".

(b) Die Datei `FE_Lagrange_1.m` enthält einen Entwurf einer Implementierung der Lagrange-Elemente erster Ordnung. Vervollständige die Implementierung an allen Stellen, welche mit "FIXME" markiert sind. Anschließend sind Sie in der Lage die Lösung mit dem Befehl "`plot_function(mesh, fe, u)`", zu zeichnen, wobei `fe` ein finites Element und `u` ein Vektor passender Größe ist.

(c) Die Funktion `area_integrator` assembliert für ein beliebiges finites Element die Steifigkeitsmatrix A und den Lastvektor f. Auch hier sollen die mit "FIXME" markierten Stellen ergänzt werden. Vergleiche dazu Abschnitt 13.1 aus der Vorlesung.

(d) Schreibe nun ein Matlab Skript `SolvePoisson.m`, welches unter Verwendung der in (b) und (c) implementierten Routinen die Poisson-Gleichung

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) = f \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ auf } \Gamma,$$

mit linearen finiten Elementen löst. Die Koeffizienten a und f müssen zunächst als Funktionen implementiert werden. Die Funktions-Handles werden `area_integrator` als Parameter mitgegeben. Zum Testen sollen die Daten $a \equiv 1$ und $f(x,y) = 4-2(x^2+y^2)$ verwendet werden. Die exakte Lösung lautet $u(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$.

Nach dem Assemblieren von A und f müssen noch die homogenen Dirichlet-Randbedingungen eingebaut werden. Dies erreicht man durch Streichen der Zeilen und Spalten aus A bzw. f, welche zu den Dirichlet-Knoten gehören. Die Indizes der Randknoten lassen sich aus `mesh.be` (Randkanten) bestimmen.

(e) *Zusatz:* Implementiere auch andere finite Elemente, zum Beispiel die Lagrange-Elemente $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_3$ oder kubische Hermite-Elemente.

Hausaufgabe 18: Ableitung einer Funktion in baryzentrischen Koordinaten

Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ das Einheitssimplex und $p : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ eine in baryzentrischen Koordinaten gegebene Funktion. Wie lautet die Ableitung von p nach x_i für $i = 1, \ldots, d$?

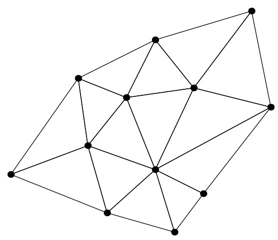
Hausaufgabe 19: Zusammenhang verschiedener Gittergrößen

Es sei $\mathcal{T}$ ein konformes Gitter aus Dreiecken ($d = 2$) bzw. Tetraedern ($d = 3$) auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Finden Sie für $d = 2$ einen „einfachen" Zusammenhang (ohne Beweis) zwischen

(a) N_{cells}, N_{edges} und N_{vertices};

(b) N_{cells}, N_{edges} und $N^{\partial}_{\text{edges}}$



und für $d = 3$ zwischen

(a) N_{cells}, N_{faces}, N_{edges} und N_{vertices};

(b) N_{cells}, N_{faces} und $N^{\partial}_{\text{faces}}$.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen für die Bestandteile 1-, 2- und 3-dimensionaler Gitter:

Bezeichnung	Anzahl der ...	Dimension	$d = \ldots$	im obigen Beispiel
N_{cells}	Zellen K	d	1,2,3	14
N_{faces}	Seitenflächen	2	3	
$N^{\partial}_{\text{faces}}$	äußeren Seitenflächen	2	3	
N_{edges}	Kanten	1	2,3	25
$N^{\partial}_{\text{edges}}$	äußeren Kanten	1	2,3	8
N_{vertices}	Knoten,	0	1,2,3	12
$N^{\partial}_{\text{vertices}}$	Randknoten	0	1,2,3	8