

---

## Numerik partieller Differentialgleichungen

### Übung 8

---

#### Aufgabe 19: Lineare Unabhängigkeit der $\sigma_\beta$

Im Lagrange-Element  $\mathbb{P}_k(K)$ ,  $k \geq 1$  eines Simplex  $K = \text{conv}\{v_0, \dots, v_d\}$  sind die Freiheitsgrade gerade Punktauswertungen an den Lagrange-Punkten. Diese besitzen die Darstellung

$$a_\alpha = \sum_{j=0}^d \frac{\alpha_j}{k} v_j.$$

Dabei bezeichnet  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_d) \geq 0$  (komponentenweise) einen Multiindex ( $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ ) mit  $\sum_{j=0}^d \frac{\alpha_j}{k} = 1$ .

Die zugehörigen baryzentrischen Koordinaten lauten

$$\lambda_j(a_\alpha) = \frac{\alpha_j}{k} \quad j = 0, \dots, d.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Lagrangesche Interpolationsaufgabe in jeder Dimension  $d$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$  eine Lösung besitzt, d.h. dass Funktionen  $p_\alpha \in P_k(K)$  mit

$$\sigma_\beta(p_\alpha) := p_\alpha(a_\beta) = \delta_{\beta\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha_j = \beta_j \text{ für alle } j = 0, \dots, d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

existieren.

- (b) Folgern Sie daraus die lineare Unabhängigkeit der  $\sigma_\beta$ .

#### Aufgabe 20: Hermite-Formfunktionen in 1D

Analog zu Beispiel 11.7 lassen sich Hermitesche Elemente in 1D auf  $K = [0, 1]$  mit  $P = P_3(K)$  durch

$$\sigma_1(p) = p(0), \quad \sigma_2(p) = p'(0), \quad \sigma_3(p) = p(1), \quad \sigma_4(p) = -p'(1)$$

definieren. Wie lauten die zugehörigen Formfunktionen? Zeichnen Sie diese.

### Aufgabe 21: Invarianz baryzentrischer Koordinaten unter affinen Transformationen

Es sei  $K = \text{conv}\{v_0, \dots, v_d\} \subset \mathbb{R}^d$  ein Simplex und  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  die Funktion, welche einen Punkt  $x \in K$  auf seine baryzentrischen Koordinaten bzgl.  $K$  abbildet. Weiter sei  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine affine Abbildung, d. h.  $T(x) = Bx + b$  mit einer regulären Matrix  $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$  und einem Vektor  $b \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt

$$\tilde{K} := T(K) = \text{conv}\{T(v_0), \dots, T(v_d)\},$$

und  $\tilde{K}$  ist wieder ein Simplex. Zeigen Sie, dass für die baryzentrischen Koordinaten  $\tilde{\lambda}$  bzgl.  $\tilde{K}$  die Beziehung

$$\tilde{\lambda}(T(x)) = \lambda(x)$$

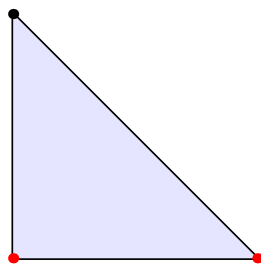
gilt, d. h. baryzentrische Koordinaten sind invariant unter affinen Transformationen.

### Hausaufgabe 16: Plotten verschiedener Formfunktionen von Lagrange-Elementen

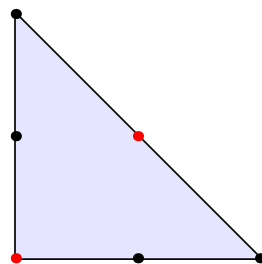
Zeichnen Sie für die in den folgenden Lagrange-Elementen mit rot markierten Freiheitsgrade die zugehörige Formfunktionen, z.B. in Matlab.

(a)  $\mathbb{P}_k$  (vgl. Beispiel 11.4) ( $d = 2$ )

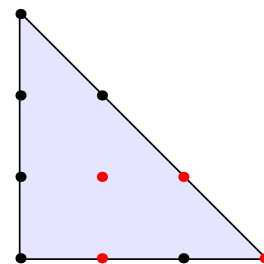
für  $k = 1$



für  $k = 2$

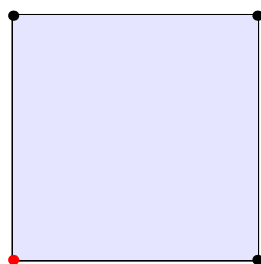


für  $k = 3$

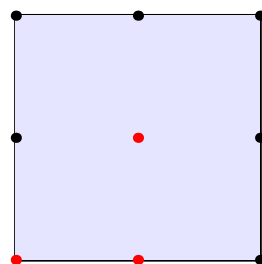


(b)  $\mathbb{Q}_k$  (vgl. Beispiel 11.5) ( $d = 2$ )

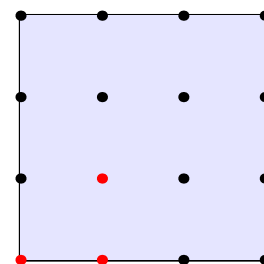
für  $k = 1$



für  $k = 2$



für  $k = 3$



**Hinweis:** Zum Plotten von Funktionen auf rechteckigen Gebieten ist der Befehl `mesh` geeignet. Im Fall von Dreiecksgebieten ist dieser jedoch unpassend. Besser ist es dann, die Funktion als Punktwolke mit dem Befehl `plot3` zu zeichnen oder das Gebiet in viele „kleine“ Dreiecke zu unterteilen und auf diesen die Funktion mit dem Befehl `patch` darzustellen.

### Hausaufgabe 17: Zur Hilbertmatrix

Wir betrachten die Hilbertmatrix  $A$  mit Einträgen

$$A_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

die sich unter anderem als Steifigkeitsmatrix bei der Lösung der Aufgabe

$$-u'' = f \quad \text{in } (0, 1), \quad u(0) = u'(1) = 0$$

mit dem Ansatzraum

$$V_h = \text{span} \left\{ \underbrace{\frac{x^i}{i}}_{=: \varphi_i} \right\}_{i=1}^n,$$

d. h. Polynomen vom Höchstgrad  $n$ , ergibt.

Untersuchen Sie, bis zu welchem Grad  $n$  sich lineare Gleichungssysteme mit der Hilbertmatrix  $Ax = b$  in Matlab zuverlässig lösen lassen.

**Hinweis:** Die Inverse der Hilbertmatrix lässt sich explizit angeben. In Matlab stehen hierfür die Funktionen `hilb` und `invhilb` zur Verfügung.