Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, Dr. M. Winkler

Chemnitz, 28. Mai 2018
Abgabe am 11. Juni 2018

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 7

Aufgabe 16: Wann ist im Céa-Lemma die Konstante 1?

Welche Bedingung muss die Bilinearform a im Céa-Lemma (Lemma 10.2) erfüllen, damit die dortige Abschätzung mit Konstante 1 gilt (d.h. $\frac{\alpha_0}{\beta_0} = 1$)?

Aufgabe 17: Existenz einer Lösung für Aufgabe mit Konvektionsterm

Beweisen Sie Satz 9.12 aus der Vorlesung.

Hinweise: Zeigen Sie für (a) die Beziehung

$$(\beta \cdot \nabla u,\, u)_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\,(u,\, (\nabla \cdot \beta)\, u)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Dabei kann verwendet werden, dass die Formel der partiellen Integration auch für H^1-Funktionen gilt.

Aufgabe 18: Isomorphe Darstellungen von Funktionalen

Um eine eindeutige Lösung für das Poisson-Problem mit reinen Neumann-Randbedingungen (9.12) zu erhalten, muss man konstante Funktionen aus dem Lösungsraum „herausnehmen“.

(a) Zeigen Sie, dass sich die natürliche Norm im Quotientenraum $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, also

$$\|[v]\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{w \in [v]} \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

durch

$$\|[v]\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \left\| v - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v \,\mathrm{d}x \right\|_{H^1(\Omega)}$$

ausdrücken lässt. Dabei bezeichnet $[v]$ die zu $v \in H^1(\Omega)$ gehörende Äquivalenzklasse.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ mit der obigen Norm isomorph zu

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v \,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

mit der $H^1(\Omega)$-Norm ist.

(c) Beweisen Sie mit dem Lemma von Lax-Milgram, dass für das Problem mit reinen Neumann-Randbedingungen im Raum V eine eindeutige Lösung existiert, die stetig von den Daten $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Gamma)$ abhängt.

(d) Man hätte auch mit dem zu V isomorphen Raum $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ arbeiten können. Damit dort das Funktional $\tilde{F}([v]) = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x + \int_\Gamma g\, v \,\mathrm{d}s$ wohldefiniert ist, benötigt man die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x + \int_\Gamma g \,\mathrm{d}s = 0.$$

Warum wurde diese in Aufgabenteil (c) nicht benötigt?

Hinweis: Verwende die in Übung 5, Aufgabe 13 gezeigte Ungleichung

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le c \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega u \,\mathrm{d}x \right)^2 \right) \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Hausaufgabe 14: Existenz einer Lösung für Aufgabe mit Konvektionsterm

Betrachte das Problem (9.13). Wir haben bereits hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit in Aufgabe 17 diskutiert. Wir verwenden nun die schwächeren Voraussetzungen $\mu > 0$, $\beta \in [L^\infty(\Omega)]^d$ und $c_0 \in L^\infty(\Omega)$. Zeige, dass die zum Problem gehörende Bilinearform $a : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Gårding-Ungleichung erfüllt, d. h., es existieren Konstanten $C_1 > 0$, $C_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$a(u, u) \ge C_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - C_2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

gilt.

Hausaufgabe 15: Charakterisierung von Unisolvenz

Angenommen P ist ein Vektorraum endlicher Dimension $s \in \mathbb{N}$. Ferner, sei $V \supset P$ ein normierter Vektorraum und $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in V^\star$. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(a) Die Menge Σ is P-unisolvent, d. h.,

$$p \in P,\ \sigma_i(p) = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, s \quad \Rightarrow \quad p = 0.$$

(b) Für alle $a \in \mathbb{R}^s$ existiert ein $p \in P$ mit $\sigma_i(p) = a_i$ für alle $i = 1, \dots, s$.

(c) Es existieren $p_1, \dots, p_s \in P$ mit $\sigma_i(p_j) = \delta_{ij}$ für alle $1 \le i, j \le s$.

Hinweis: P besitzt eine Basis.