Technische Universität Chemnitz | Chemnitz, 22. Mai 2018
Prof. Dr. R. Herzog, Dr. M. Winkler | Abgabe am 4. Juni 2018

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 6

Aufgabe 14: Beweis des schwachen Maximumprinzips

In Satz 5.1 haben wir bereits das diskrete Maximumprinzip für ein Differenzenverfahren kennengelernt. Beweise nun das schwache Maximumprinzip für das Poisson-Problem, d. h., zeige, dass die schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ der Aufgabe

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \qquad u = 0 \text{ auf } \Gamma$$

die Eigenschaft $u \leq 0$ f.ü. erfüllt, falls $f \leq 0$ f.ü..

Hinweis: Teste die Gleichung mit der Funktion

$$u^+ = \max\{0, u\}.$$

Für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ (vgl. Stampacchia-Lemma, Übung 5, Aufgabe 11).

Aufgabe 15: Koerzive Bilinearformen

Sei V ein Banachraum und sei $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und koerzive Bilinearform, d. h. die Voraussetzungen des Lax-Milgram-Lemmas (9.5) sind erfüllt. Ferner erfülle a die Cauchy-Schwarz-Ungleichung der Form

$$a(u, v) \leq \sqrt{a(u, u) \cdot a(v, v)}, \qquad u, v \in V.$$

(a) Wir definieren die Abbildung $\|\cdot\|_a\colon V \to \mathbb{R}$ über $\|v\|_a = \sqrt{a[v, v]}$ für $v \in V$. Zeige, dass $\|\cdot\|_a$ eine zu $\|\cdot\|_V$ äquivalente Norm ist. Zeige außerdem, dass $(V, \|\cdot\|_a)$ ein Hilbertraum ist.

(b) Sei a nun zusätzlich symmetrisch und sei $F \in V^\star$ ein Funktional auf V. Wie in Bemerkung 9.3 betrachten wir das Minimierungsproblem

$$\text{Minimize} \quad \varphi(u) := \frac{1}{2}\|u\|_a^2 - F(u) \quad \text{über } u \in V. \tag{9.7}$$

Zeige, dass $\hat{u} \in V$ eine Lösung dieses Problems ist, genau dann wenn

$$a[\hat{u}, v] = F(v) \qquad \forall v \in V$$

erfüllt ist. Gilt das auch, wenn wir die Symmetrieannahme nicht fordern?

Hausaufgabe 11: Abhängigkeit der Beschränktheitskonstante des Lösungsoperators von der Wahl der Norm

Wie ändern sich die Konstanten in Satz 9.4, wenn man anstelle der $H^1(\Omega)$-Norm die auf $H_0^1(\Omega)$ äquivalente $H^1(\Omega)$-Seminorm wählt?

Hausaufgabe 12: Partielle Integration für Sobolev-Funktionen

Gegeben sei $p \in (1, \infty)$. Wir bezeichnen mit p' den konjugierten Exponenten.

(a) Zeige, dass

$$\int_\Omega D_i u \, v + u \, D_i \, v \, \mathrm{d}x = 0$$

für alle Funktionen $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ erfüllt ist.

(b) Angenommen Ω besitze einen Lipschitz-Rand. Beweise, dass die Gleichung

$$\int_\Omega D_i u \, v + u \, D_i \, v \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u \, v \, n_i \, \mathrm{d}s$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ gilt.

Hinweis: Approximiere u und v durch glatte Funktionen (Dichtheitsargument). Für glatte Funktionen kann (a) direkt gezeigt werden. Die Gleichung aus (b) kann unter Verwendung von (8.2) gezeigt werden.

Hausaufgabe 13: Einbettungen in den Raum der stetigen Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und sei $p > d$ gegeben. Zeige, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

für all $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ erfüllt ist. Folgere außerdem, dass u stetig ist.

Hinweis: Beweise die Behauptung zunächst für $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Zeige dazu, dass für beliebiges $x_0 \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit $|\xi| = 1$, für hinreichend großes $R > 0$ gilt:

$$|u(x_0)| \leq \int_0^R |\nabla u(x_0 + t\,\xi)| \, \mathrm{d}t.$$

Integriere diese Ungleichung anschließend über $\xi \in \partial B_1(0)$ (bezüglich dem Oberflächenmaß) und führe die Rücktransformation in kartesische Koordinaten durch um

$$|u(x_0)| \leq C \int_{B_R(x_0)} \frac{|\nabla u(x)|}{|x - x_0|^{d-1}} \, \mathrm{d}x$$

zu erhalten. Folgere die Behauptung aus der Hölder-Ungleichung.