Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, Dr. M. Winkler

Chemnitz, 7. Mai 2018
Abgabe am 21. Mai 2018

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 5

Aufgabe 10: Eine stückweise glatte Funktion

Wir betrachten die Funktion $f_\alpha(x) := |x|^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ auf dem Gebiet $\Omega = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| < 1\}$.

(a) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty]$ gilt $f_\alpha \in L^p(\Omega)$?

(b) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt f_α schwache Ableitungen erster Ordnung?

(c) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty]$ gilt $f_\alpha \in W^{1,p}(\Omega)$?

Aufgabe 11: Kettenregel und Stampacchia-Lemma

Sei Ω ein beschränktes Gebiet.

(a) Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und es existiere eine Konstante $M > 0$, sodass $|f'(x)| \le M$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Zeige, dass $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ für ein beliebiges $u \in W^{1,p}(\Omega)$ erfüllt ist, sowie die Kettenregel $D_i(f(u)) = f'(u)\, D_i u$ für $i = 1, \ldots, d$.

(b) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gegeben. Zeige, dass u^+ definiert durch $u^+(x) = \max(u(x), 0)$ zu $W^{1,p}(\Omega)$ gehört und dass

$$D_i\, u^+(x) = \begin{cases} D_i\, u(x) & \text{falls } u(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 1, \ldots, d$ und fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

(c) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gegeben. Zeige, dass $D_i\, u = 0$ fast überall auf $\{x \in \Omega \colon u(x) = 0\}$ erfüllt ist.

(d) Zeige, dass für eine beliebige Funktion $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ die Beziehungen $u^+, u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gelten.

Aufgabe 12: Poincaré-Ungleichung für $H^1(\Omega)$-Funktionen

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet mit Rand Γ. Zeige, dass eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$ existiert, sodass die Ungleichung

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Gamma)} \right)^{1/2}$$

für jede Funktion $u \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist.

Hinweis: Betrachte den Ausdruck $\int_\Omega (u^2 \Delta\phi)$ mit $\phi = (2d)^{-1}|x|^2$, nutze die Eigenschaft $\Delta\phi = 1$ und argumentiere mit der Green'schen Identität

$$\int_\Omega v \Delta w \, \mathrm{d}x = - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x + \int_\Gamma v \, \partial_n w \, \mathrm{d}s,$$

wobei $n(x)$ der äußere Normalenvektor am Rand Γ ist.

Aufgabe 13: Poincaré-Ungleichung für $H^1(\Omega)$-Funktionen

Es sei $\Omega := (0,1)^2$ das Einheitsquadrat. Für eine beliebige Funktion $v \in L^2(\Omega)$ definieren wir die Projektion $\bar{v} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x) \, \mathrm{d}x$ auf konstante Funktionen. Zeige, dass eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$ existiert, so dass die Ungleichung

$$\|v - \bar{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle Funktionen $v \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist. Folgere daraus die Poincaré-Ungleichung

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega v(x) \mathrm{d}x \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Hausaufgabe 9: Eine stückweise glatte Funktion

Auf $\Omega = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| < 1/2\}$, $d \geq 1$, betrachten wir die Funktion f_α definiert durch $f_\alpha(x) := \big|\log|x|\big|^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty]$ gilt $f_\alpha \in L^p(\Omega)$?

(b) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt f_α schwache Ableitungen erster Ordnung?

(c) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty]$ ist $f_\alpha \in W^{1,p}(\Omega)$ erfüllt?

Hausaufgabe 10: Sobolevräume in einer Dimension

Sei $L > 0$ und $p \in [1, \infty]$. Zeige folgende Äquivalenz:

$$u \in W^{1,p}(0, L) \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ ist absolut stetig mit } u' \in L^p(0, L).$$

Hinweis: "$\Rightarrow$": Wähle $v(x) = \int_0^x u' \, \mathrm{d}t$. Zeige $v' = u'$ und, dass $v - u$ konstant ist.
"$\Leftarrow$": Nutze die Tatsache, dass eine absolut stetige Funktion u im klassischen Sinne fast überall differenzierbar ist, sowie $u(x) = u(0) + \int_0^x u' \, \mathrm{d}t$.