Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, Dr. M. Winkler

Chemnitz, 24. April 2018
Abgabe am 7. Mai 2018

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 4

Aufgabe 9: Finite Elemente in 1D

Sei $L > 0$ und $f \in C([0, L])$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \qquad \text{für } x \in (0, L), \\ u(0) = u'(L) &= 0. \end{aligned}$$

In dieser Übung werden wir eine MATLAB-Implementierung zur approximativen Lösung des Randwertproblems mit einer Finite-Elemente-Diskretisierung (siehe Abschnitt 7.3) schreiben. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, dass S der Raum der stetigen und stückweise polynomialen Funktionen der Ordnung $p \in \{1, 2\}$ ist.

(a) Schreibe eine Lösungsroutine `fem_1d.m` mit folgender Kopfzeile:

```
function [U] = fem_1d( x, p, f )
```

Hierbei ist $x = (x_0, \dots, x_n)^\top$ die Liste der Knotenkoordinaten, $p \in \{1, 2\}$ der Polynomgrad und f ein Funktions-Handle für die rechte Seite. Der Rückgabewert U ist ein Vektor mit den Komponenten

$$U_{(i-1)p+j} = u_S\left(x_{i-1} + \frac{j}{p}(x_i - x_{i-1})\right), \quad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, p.$$

Die fertige Funktion lässt sich beispielsweise aufrufen mit:

```
U = fem_1d( linspace(0,1,21), 1, @(x)(sin(3*pi*x)) )
```

(b) Verwende ein äquidistantes Gitter $x_i = i\,h$, $i = 0, \dots, n$, mit $h = L/n$. Löse das System (7.3) zur rechten Seite $f(x) = \sin(3\,\pi\,x)$ für verschiedene Gitterfeinheiten und stelle die Lösung grafisch dar.

Berechne die Fehler $\|u_S - u_I\|_{L^2(\Omega)}$ und $|u_S - u_I|_{H^1(\Omega)}$, wobei u_S die Lösung des diskreten Problems und u_I die Interpolierende der exakten Lösung ist. Dafür ist es hilfreich die Steifigkeitsmatrix (ohne Modifikationen für die Randdaten) und die Massematrix separat abzuspeichern. Dazu erweitern die Funktion `fem_1d` um 2 weitere Ausgabeparameter:

```
function [U,K,M] = fem_1d( x, p, f )
```

Schätze die Konvergenzordnung und interpretiere die Resultate. Approximiere außerdem den Fehlerterm $|u_S - u|_{H^1(\Omega)}$ mit der Simpson-Regel (für $p = 1$) und einer Quadraturformel höherer Ordnung (für $p = 2$) auf den Intervallen $[x_{k-1}, x_k]$.

(c) Implementiere ein adaptives Verfahren wie in Abschnitt 7.6.

Hausaufgabe 7: Ein Fehlerschätzer bezüglich $L^2(0, L)$

Verwende ähnliche Argumente wie in Abschnitt 7.6 um eine (lokalisierte) Fehlerabschätzung für $\|u - u_S\|_{L^2(0,L)}$ zu zeigen.

Hinweis: Beginne mit dem dualen Problem

$$\text{Finde } w \in V \quad \text{so dass} \quad a(v, w) = (u - u_S,\, v)_{L^2(0,L)} \quad \text{für alle } v \in V.$$

Hausaufgabe 8: Superkonvergenz der Ableitungen

Erläutere die Konvergenzresultate aus Aufgabe 9 (b) im Fall $p = 1$. Beweise dazu zunächst die Abschätzung

$$|u_S - u_I|_{H^1(0,L)} \leq C\, h^2,$$

wobei u_S die Lösung von (7.3) und u_I die Interpolierende der Lösung des stetigen Problems (7.1) ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass u_S die Gleichung

$$u_S'(x) = \frac{1}{x_{k-1} - x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} u'(t)\, \mathrm{d}t \qquad \forall x \in (x_{k-1}, x_k)$$

erfüllt, d. h., dass die Ableitung von u_S mit dem Mittelwert von u' auf jedem Intervall (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \ldots, n$, übereinstimmt.