Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, Dr. M. Winkler

Chemnitz, 20. April 2017
Abgabe am 8. Mai 2017

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 3

Aufgabe 6: Implementierung verschiedener Normen

Für Funktionen $v_h, w_h \in V_h$, $u_h \in U_h$ definiert man

- die **diskrete L^∞-Norm** durch
$$\|v_h\|_{L^\infty,h} = \max_{x\in\Omega_h} |v_h(x)|$$
- das **diskrete L^2-Skalarprodukt** durch
$$(v_h, w_h)_h = h^d \sum_{x\in\Omega_h} v_h(x)\, w_h(x)$$
und die zugehörige **diskrete L^2-Norm** durch
$$\|v_h\|^2_{L^2,h} = h^d \sum_{x\in\Omega_h} |v_h(x)|^2$$
- die **diskrete H^1-Seminorm** durch
$$|u_h|^2_{H^1,h} = h^d \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{x\in\overline{\Omega}_h \\ x+he_j\in\overline{\Omega}_h}} \big|[D_j^+ u_h](x)\big|^2$$

Hierbei bezeichnet Ω_h die inneren Gitterpunkte zur Gitterweite h. Implementieren Sie diese vier Funktionen in Matlab für den Fall, dass es sich bei Ω um das Einheitsquadrat ($d = 2$) handelt (vgl. § 3). Dabei wird der Funktion für die H^1-Seminorm ein Vektor $\vec{u}_h$ mit

$$\vec{u}_h = (\underbrace{u_{0,0}, u_{1,0}, \ldots, u_{n,0}}_{\text{0. Zeile in } \bar{\Omega}_h}, \underbrace{u_{0,1}, u_{1,1}, \ldots, u_{n,1}}_{\text{1. Zeile in } \bar{\Omega}_h}, \ldots, \underbrace{u_{0,n}, u_{1,n}, \ldots, u_{n,n}}_{n\text{. Zeile in } \bar{\Omega}_h})^\top$$

übergeben. Für $u_h \in U_h$ ist $u_{i,j}$ der Funktionswert an der Stelle $x_{i,j} = (ih, jh)^\top$. Hingegen wird den anderen Funktionen ein Vektor $\vec{v}_h$ mit

$$\vec{v}_h = (v_{1,1}, \ldots, v_{n-1,1}, \ldots, v_{1,n-1}, \ldots, v_{n-1,n-1})^\top$$

übergeben (dem Skalarprodukt werden natürlich zwei solcher Vektoren übergeben). Implementiere auch eine Funktion `Restrict_to_Inner`, welche die Randkomponenten von $\vec{u}_h$ abschneidet sowie eine Funktion `Extend_to_Boundary`, welche die fehlenden Randkomponenten von $\vec{v}_h$ mit 0 auffüllt. Die entsprechenden Funktionsköpfe sollen

```
function norm = Linfty_Norm_Unitsquare(v)
function ip   = L2_InnerProduct_Unitsquare(v,w)
function norm = L2_Norm_Unitsquare(v)
function norm = H1_Seminorm_Unitsquare(u)
function v = Restrict_to_Inner(u)
function u = Extend_to_Boundary(v)
```

lauten.

Aufgabe 7: Quadratische Konsistenzordnung des 5-Punkte-Sterns numerisch verifizieren

Überprüfen Sie numerisch die quadratische Konsistenzordnung des 5-Punkte-Schemas (vgl. Satz 4.3). Verwenden Sie dafür die Funktion

$$u(x) = e^{x_1 \cdot x_2} \cdot \sin(x_1^2)$$

auf dem Einheitsquadrat. Bestimmen Sie zunächst

$$f := -\Delta u$$

exakt, und berechnen Sie anschließend den Konsistenzfehler

$$e_h := \left\| [-\Delta_h^{(5)} u] - f_h^{(1)} \right\|_{\infty,h}$$

für verschieden feine Gitterweiten h. Stellen Sie den Zusammenhang von h und e_h in einem doppelt logarithmischen Plot dar, und schätzen Sie die Konvergenzordnung wie in Übung 2, Hausaufgabe 3 (a) und (b) beschrieben.

Aufgabe 8: FDV auf dem Einheitsquadrat

Implementieren Sie in Matlab das Finite-Differenzen-Verfahren mit dem 5-Punkte-Stern zur Lösung des Problems

$$\begin{aligned} L\,u := -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Sie müssen das in der Vorlesung behandelte Verfahren leicht modifizieren, um die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen behandeln zu können. Nehmen Sie dazu die Gleichungen

$$u_h(x) = g(x) \qquad \text{für alle } x \in \Gamma_h$$

an entsprechender Stelle mit in die Systemmatrix auf.

Um das Verfahren zu testen, sei die exakte Lösung $u(x) = e^{x_1 \cdot x_2} \cdot \sin(x_1^2)$ vorgegeben. Daraus bestimmt sich $f := -\Delta u$ und $g := u|_\Gamma$ entsprechend. Zeichnen Sie den Verlauf der Fehler $e_{L^\infty,h} := \|u - u_h\|_{L^\infty,h}$, $e_{L^2,h} := \|u - u_h\|_{L^2,h}$ und $e_{H^1,h} := |u - u_h|_{H^1,h}$ sowie die Kondition der Systemmatrix (bzgl. der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$) in Abhängigkeit von h in doppelt logarithmische Plots ein. Bestimmen Sie auch die experimentelle Konvergenzordnung.

Hinweise:

- Verwenden Sie `sparse` Matrizen (`help sparse`). Weitere nützliche Befehle sind `speye`, `spdiags` und `kron`.
- Mit den Aufrufen `eigs(Lh,1)` und `eigs(Lh,1,'SM')` können der größte und kleinste Eigenwert von `Lh` bestimmt werden.
- Eine Schätzung der Konditionszahl (bezüglich der 1-Norm) für `sparse` Matrizen erhält man mit `condest`.

Hausaufgabe 5: Besetzungsstruktur der Systemmatrix für verschiedene Sortierungen

Die Systemmatrix, welche aus (4.2) entsteht, hängt von der Sortierung der unbekannten Funktionswerte $u_{i,j}$ ab. Zeichnen Sie schematisch die Gestalt der Systemmatrix, falls die unbekannten Funktionswerte

(a) lexikographisch,

(b) diagonal,

(c) im Schachbrettmuster

sortiert werden.

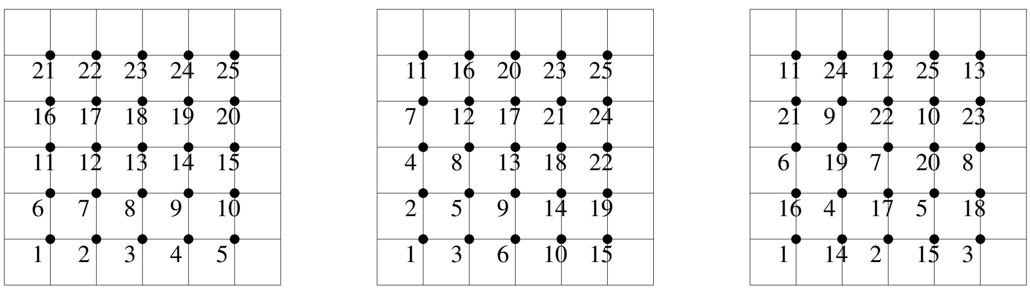

Abbildung 1: lexikographische, diagonale und Schachbrettmuster-Anordnung

Hausaufgabe 6: Diskrete Sobolev-Einbettung

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass für $u \in U_h^0$ und $n \geq 2$ die Abschätzung

$$\|u\|_{L^\infty,h} \leq C\,(\log n)^{1/2}\,|u|_{H^1,h}$$

gilt.

Hinweis: Nehmen Sie $n/2 \le k, \ell \le n-1$ und für $1 \le i \le k-1$ gilt dann

$$u_{k,\ell} = h\left(\sum_{j=1}^{\ell}(D_2^- u)(x_{i,j}) + \sum_{j=i}^{k-1}(D_1^+ u)(x_{j,\ell})\right).$$

Gewichten Sie diese Gleichungen mit $a_i > 0$ und summieren Sie über $i = 1, \dots, k-1$. Durch Abschätzen und eine geschickte Wahl der a_i erhalten Sie dann

$$|u_{k,\ell}| \le C\,(\log n)^{1/2}\,|u|_{H^1,h}.$$

Falls $(n-1)/2 < k, \ell \le n-1$ nicht gilt, kann man durch Spiegeln die Situation auf die obige zurückführen.