Chemnitz, 5. April 2017
Abgabe am 24. April 2017

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 2

Aufgabe 4: Eigenwerte des diskreten Laplace-Operators

Wir betrachten die Matrix $L_h \in \mathbb{R}^{(n-1)^2\times(n-1)^2}$ zum 5-Punkte-Stern

$$L_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -I \\ & & & -I & T \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Rechnen Sie nach, dass der Laplace-Operator auf dem Einheitsquadrat $\Omega := (0,1)^2$ die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda^{i,j} = (i^2+j^2)\pi^2 \quad \text{und} \quad w^{i,j} = \sin(i\,\pi\,x)\sin(j\,\pi\,y), \qquad i,j = 1,2,\ldots$$

besitzt, d. h. die Paare $(\lambda^{i,j}, w^{i,j})$ lösen das Randwertproblem

$$-\Delta w^{i,j} = \lambda^{i,j} w^{i,j} \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad w^{i,j} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

(b) Zeigen Sie, dass L_h die Eigenwerte

$$\begin{aligned}\lambda^{i,j} &= \frac{1}{h^2}\Big(4 - 2\,\big(\cos(i\,h\,\pi) + \cos(j\,h\,\pi)\big)\Big) \\ &= \frac{4}{h^2}\Big(\sin^2\big(\frac{i\,h\,\pi}{2}\big) + \sin^2\big(\frac{j\,h\,\pi}{2}\big)\Big) \qquad i,j = 1,\ldots,n-1\end{aligned}$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$w^{i,j}(x_{k,m}) = \sin(i\,\pi\,k\,h)\,\sin(j\,\pi\,m\,h) \qquad k,m = 1,\ldots,n-1$$

besitzt. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren bezüglich des diskreten L^2-Skalarproduktes senkrecht aufeinander stehen.

(c) Zeigen Sie, dass für die Kondition bzgl. der Spektralnorm von L_h

$$\kappa_2(L_h) = \frac{\lambda_{\max}(L_h)}{\lambda_{\min}(L_h)} = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{h^2} + \mathcal{O}(1)$$

gilt.

Aufgabe 5: Ein Differenzenverfahren der Ordnung 4

Durch Hinzunahme weiterer Punkte im Differenzenstern können höhere Approximationsordnungen erreicht werden. Zeigen Sie, dass der **kompakte 9-Punkte-Stern**

$$\frac{1}{6h^2}\begin{bmatrix}-1 & -4 & -1\\ -4 & 20 & -4\\ -1 & -4 & -1\end{bmatrix},$$

also das Schema

$$[-\Delta_h^{(9)}u](x) = \frac{1}{6h^2}\big[20u(x) - 4u(x_1 \pm h, x_2) - 4u(x_1, x_2 \pm h) - u(x_1 \pm h, x_2 \pm h)\big],$$

in Verbindung mit

$$f_h^{(5)}(x) = f(x) + \frac{h^2}{12}[\Delta_h^{(5)} f](x)$$

die Konsistenzordnung 4 bzgl. der diskreten L^∞-Norm ($u \in C^{5,1}(\overline{\Omega})$ vorausgesetzt) hat. Das Schema hat jedoch nur Konsistenzordnung 2 bei Verwendung von $f_h^{(1)}(x) = f(x)$.

Hausaufgabe 3: Bestimmung der experimentellen Konvergenzordnung

Häufig besteht zwischen der Norm des Fehlers $E_h := \|e_h\|$ und dem Diskretisierungsparameter h ein theoretischer Zusammenhang der Form

$$E_h \leq C\, h^p.$$

Um experimentell die vorausgesagte Konvergenzordnung p zu überprüfen, macht man den Ansatz

$$E_h \approx C\, h^p,$$

wobei C sowie p unbekannt sind.

(a) Wie kann aus zwei Fehlern E_{h_1} und E_{h_2} die numerische (experimentelle) Konvergenzordnung p geschätzt werden?

(b) Die erhaltene Formel lässt sich als Anstieg der Gerade, welche die beiden Punkte (h_1, E_{h_1}) und (h_2, E_{h_2}) in einem doppelt logarithmischen Plot verbindet, interpretieren. Für mehrere Punkte $(h_1, E_{h_1}), \ldots, (h_n, E_{h_n})$ ($n \geq 2$) kann die Idee entsprechend verallgemeinert werden. Gesucht sind nun die Parameter C und p von einer Funktion $h \mapsto C\, h^p$, welche die Punkte in einem doppelt logarithmischen Plot im Sinne der „kleinsten Quadrate" am besten approximiert. Wie lautet das entsprechende „Kleinste-Quadrate-Problem" und die zugehörige Normalengleichung?

(c) Implementieren Sie die Lösung aus (b) als eine Funktion in MATLAB. Der entsprechende Funktionskopf soll

```
function [p,q] = eoc(h, e)
```

lauten. Die Vektoren `h` und `e` enthalten die Gitterweiten und Fehler. Die Rückgabewerte `p` und `q` sind (kleinste-Quadrate)-Schätzungen für p und $\ln(C)$.

(d) Schätzen Sie die Konstante C und Konvergenzordnung p für die folgenden Messdaten.

h	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
E_h	6.91e-01	1.78e-01	4.33e-02	1.78e-02	3.07e-03

Zeichnen Sie Messdaten und die Funktion Ch^p in einen doppelt-logarithmischen Plot ein.

Hausaufgabe 4: Im Dunstkreis des 5-Punkte-Sterns

(a) Beweisen Sie Bemerkung 4.4 (a).

(b) Zeigen Sie, dass das 5-Punkte-Schema für den Fall $u \in C^3(\overline{\Omega})$ nur die Konsistenzordnung 1 hat.