Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, Dr. M. Winkler

Chemnitz, 3. April 2018
Abgabe am 16. April 2018

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 1

Aufgabe 1: Randbedingungen der Wärmeleitgleichung

Es sei $\Omega := (0, L)$ ein eindimensionales Gebiet. Darauf betrachten wir die stationäre (d. h. zeitunabhängige) Wärmeleitgleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 1, \quad x \in \Omega, \\ u(0) &= 0, \\ u'(L) + \alpha(u(L) - u_{\text{raum}}) &= 0. \end{aligned}$$

Die physikalische Interpretation der Randbedingungen ist, dass die Temperatur am linken Rand auf $u = 0$ gehalten wird, und sich am rechten Rand ein Wärmefluss entsprechend der Differenz $u - u_{\text{raum}}$ einstellt. Der Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ wird dabei als Wärmeübergangskoeffizient bezeichnet.

Leiten Sie die analytische Lösung dieser Differentialgleichung her. Was passiert bei den Spezialfällen $\alpha = 0$ und $\alpha \to \infty$?

Aufgabe 2: Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Leiten Sie aus geeigneten Annahmen die instationäre Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - k\,\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

mit gegebener Anfangsbedingung u_0 her und lösen Sie diese mit `Matlab` in dem Gebiet $\Omega = (0,\,1)$ bis zur Zeit $T = 0.3$ und für die folgenden Randbedingungen und Daten.

(a) Isolierende Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma \times (0, T)$$

mit $k \equiv 1$, $f \equiv 0$, $u_0(x) = \max\{\sin(3\,\pi\,x), 0\}$.

(b) Wie in (a) jedoch mit unstetiger Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (0,\, 1/2), \\ 1 & \text{für } x \in [1/2,\, 1). \end{cases}$$

(c) Wie in (b) jedoch mit (zeitunabhängigem) Quellterm

$$f(x,t) = 2\,u_0(x).$$

(d) Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{auf } \{0\} \times (0,T), \\ u &= 1 \quad \text{auf } \{1\} \times (0,T), \end{aligned}$$

mit $k \equiv 1$, $f \equiv 0$ und

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (0,\, 1/2), \\ 1 & \text{für } x \in [1/2,\, 1). \end{cases}$$

(e) Wie in (d) jedoch mit (zeitunabhängigem) Quellterm

$$f(x,t) = 2\,u_0(x).$$

Aufgabe 3: Beweis des Maximumprinzips

Es sei Ω ein Gebiet.

(a) Beweisen Sie das Maximumprinzip: Für jede Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt:

$$(-\Delta u)(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \Gamma} u(x),$$

d. h., u nimmt sein Maximum auf dem Rand Γ an.

(b) Zeigen Sie das Vergleichsprinzip: Für $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt

$$\left.\begin{aligned} (-\Delta u)(x) \leq (-\Delta v)(x) \quad & \text{für alle } x \in \Omega \\ u(x) \leq v(x) \quad & \text{für alle } x \in \Gamma \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad u(x) \leq v(x) \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}.$$

(c) Zeigen Sie, dass für $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\Gamma)$ eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma \end{aligned}$$

(wenn sie existiert), eindeutig ist.

(d) Es sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Poisson-Gleichung für $f \in C(\Omega)$ und $g(x) = 0$. Weiter gelte $|f| \leq 1$ auf Ω. Zeigen Sie, dass dann $|u| \leq 1/8$ auf $\overline{\Omega}$ gilt.

Hinweis: Beweisen Sie in (a) zuerst die Aussage für den Fall $-\Delta u(x) < 0$ für alle $x \in \Omega$.

Hausaufgabe 1: Klassifikation von Differentialgleichungen

Untersuche die folgenden partiellen Differentialgleichungen auf Linearität:

(a) $u_x + u_y = 0$

(b) $u_x + u_y = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$

(c) $u_y + u u_x = 1$

(d) $\sqrt{1+x^2}u_{xx} + \cos(y)u_{yy} = \sqrt{x^2+y^2}$

(e) $u_{xx} + u_{yy}^2 = 1$

(f) $u_t + \mathrm{i}u_x = 0$

Hausaufgabe 2: Laplace-Operator in Polarkoordinaten

(a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ für eine Funktion $u(r,\,\varphi)$ in Polarkoordinaten $(r,\,\varphi) \in (0,\,\infty) \times [0,\,2\pi)$ die Form

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

hat.

Hinweis: Definieren Sie die Funktion u in kartesischen Koordinaten als $\tilde{u}$, d. h. es gilt $\tilde{u}(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = u(r,\varphi)$ für alle $(r,\varphi) \in (0,\infty) \times [0, 2\,\pi)$. Leiten Sie diese Gleichung dann unter Verwendung der Kettenregel nach r und φ ab.

(b) Für einen Winkel $\omega \in (0, 2\pi]$ sei $\Omega := \{(r,\,\varphi) : 0 < r < 1,\ \varphi \in (0,\,\omega)\}$ der zugehörige Sektor des Einheitskreises in der Ebene. Zeigen Sie, dass die auf Ω definierte Funktion

$$u(r,\,\varphi) := r^{\pi/\omega} \sin\big(\frac{\varphi\,\pi}{\omega}\big)$$

Lösung der PDE

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega\\
u(r,\,0) &= 0 && \text{für } 0 \le r \le 1\\
u(r,\,\omega) &= 0 && \text{für } 0 \le r \le 1\\
u(1,\,\varphi) &= \sin\big(\frac{\varphi\,\pi}{\omega}\big) && \text{für } 0 \le \varphi \le \omega
\end{aligned}$$

ist und dass sich die erste Ableitung $\partial u/\partial r$ für $\omega > \pi$ nicht stetig auf den Rand von Ω fortsetzen lässt, d.h. $u \notin C^1(\overline{\Omega})$.

(c) Berechnen Sie für $R \in (0,1)$ eine rotationssymmetrische Lösung u der Gleichung

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 && \text{in } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid R < x^2 + y^2 < 1\},\\
u &= 1 && \text{für } x^2 + y^2 = R,\\
u &= 0 && \text{für } x^2 + y^2 = 1.
\end{aligned}$$