Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 3. Juli 2014
Abgabe am 14. Juli 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 12

Aufgabe 32: Transformation der $H^m(\Omega)$-Seminorm für $m = 1$

Beweisen Sie Lemma 14.9 aus der Vorlesung für $m = 1$.

Aufgabe 33: Eigenwerte lokaler Massen- und Steifigkeitsmatrix

Berechnen Sie $\lambda_{\min}(M)$ und $\lambda_{\max}(A)$ wobei $M, A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$M_{ij} = \int_{\widehat{K}} p_i \, p_j \, \mathrm{d}x$$
$$A_{ij} = \int_{\widehat{K}} (\nabla p_i \cdot \nabla p_j + p_i \, p_j) \, \mathrm{d}x$$

gegeben sind. Dabei bezeichnen p_i $(i = 1, 2, 3)$ die linearen Formfunktionen von $\mathbb{P}_1$-Elementen und $\widehat{K}$ das Einheitssimplex in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 34: Eigenwerte und Kondition von Massen- und Steifigkeitsmatrix

Es sei

- $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ eine quasi-uniforme Familie von Gittern auf dem polyedrischen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- auf jedem Gitter $\mathcal{T}$ sei $\{(K, P_K, \Sigma_K\}_{K\in\mathcal{T}}$ eine affine Familie von FE mit dem gemeinsamen Referenzelement $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$. Der zugehörige FE-Raum V_h sei V-konform, d.h. $V_h \subset V$.
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrische, beschränkte und elliptische Bilinearform zum Differentialoperator L der Ordnung 2, sowie $V = H^1(\Omega)$ und

  $$A \in \mathbb{R}^{m\times m} \qquad \text{mit} \qquad A_{ij} = a[\varphi_i, \varphi_j]$$

  die Steifigkeitsmatrix und

  $$M \in \mathbb{R}^{m\times m} \qquad \text{mit} \qquad M_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \, \varphi_j \, \mathrm{d}x$$

  die Massenmatrix. Dabei sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ $(m = N_{\text{global\_dofs}})$ die globalen Freiheitsgrade, d.h. es gilt $V_h = \operatorname{lin}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ und $\dim V_h = m$.

Zeigen Sie

(a) Es existieren $\underline{c}_M, \overline{c}_M$ mit

$$\underline{c}_M \cdot h^d \leq \lambda_{\min}(M) \leq \lambda_{\max}(M) \leq \overline{c}_M \cdot h^d.$$

Folgern Sie $\kappa_2(M) = \mathcal{O}(1)$ daraus.

(b) Es existieren $\underline{c}_A, \overline{c}_A$ mit

$$\underline{c}_A \cdot \lambda_{\min}(M) \leq \lambda_{\min}(A) \leq \lambda_{\max}(A) \leq \overline{c}_A \cdot \lambda_{\max}(M) \cdot h^{-2}$$

Folgern Sie $\kappa_2(A) = \mathcal{O}(h^{-2})$ daraus.

Aufgabe 35: $H^1(\Omega)$-konforme Hermite Elemente

Welche Bedingungen muss man an eine affine Familie kubischer Hermite-Elemente auf den inneren Kanten einer geometrisch konformen Triangulierung (mit $d = 2$) stellen, damit man eine $H^1(\Omega)$-konforme Approximation erhält?

Aufgabe 36: Zusammenhang Determinante und Volumen

Zeigen Sie die Beziehung

$$|\det(B_K)| = \frac{|K|}{|\widehat{K}|}$$

aus Abschnitt § 13.1.

Hausaufgabe 24: Dimension von V_h mittels Gittergrößen ausdrücken

Sei V_h wie in Folgerung 12.9 der FE-Raum zu einer affinen Familie von Lagrange-Elementen $\mathbb{P}_k$ oder $\mathbb{Q}_k$. Drücken Sie die Dimension von V_h für $d = 2, 3$ und $k = 1, 2, 3$ mit Hilfe von N_{cells}, N_{edges}, N_{vertices}, N_{faces} aus. (3 Punkte)