Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 3. Juli 2014
Abgabe am 7. Juli 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 11

Aufgabe 29: Implementierung der Finiten-Elemente-Methode

(a) Implementieren Sie die Finite-Elemente-Methode zur Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} -\triangle u + u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

in Matlab für $d = 2$. Dabei sollen die Gitter-Daten und die Connectivity-Matrix als Eingabeparameter dienen (siehe Aufgabenteil (b)). Realisieren Sie die Verwendung von $\mathbb{P}_1$- und $\mathbb{P}_2$-Elementen und implementieren Sie die Quadraturformeln von erster und zweiter Ordnung (siehe Beiblatt Quadraturformeln). Gehen Sie bei der Umsetzung wie in der Vorlesung beschrieben vor und gestalten Sie Ihr Programm modular. Lagern Sie insbesondere die Funktion f, das Assemblieren, usw. in entsprechende Unterroutinen aus.

(b) Testen Sie Ihre Methode für

$$f(x_1, x_2) = x_1$$

und die in der Datei `Mesh_1_squareg_Connectivity_P1P2.mat` gegebenen selbsterklärenden Gitter-Daten (Einheitsquadrat) und die beiden gegebenen Connectivity-Matrizen (für $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$). Lösen Sie das Problem mit $\mathbb{P}_1$- und $\mathbb{P}_2$-Elementen mit jeweils beiden Quadraturformeln und plotten Sie die diskreten Lösungen.

Aufgabe 30: FEM für Aufgabe mit Dirichlet-RB

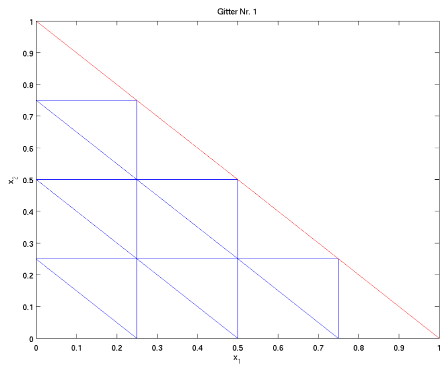
(a) Modifizieren Sie Ihr Programm aus Aufgabe 29, um Probleme der Bauart

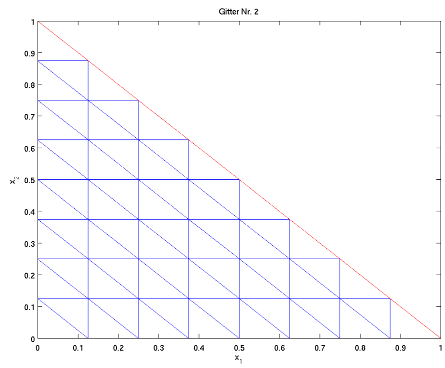
$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

lösen zu können. Zur Behandlung der inhomogenen Dirichlet-Randbedingung, sollen die in der Vorlesung § 13.2 (b) vorgestellten Möglichkeiten (i)–(iv) implementiert werden. Welche globalen Freiheitsgrade auf den Kanten liegen (und deren Koordinaten), wird der Methode bereitgestellt (siehe Aufgabenteil (c)).

(b) Implementieren Sie eine Funktion zur Berechnung von $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$. Dabei ist u_h eine Funktion aus V_h (repräsentiert durch einen Vektor) und u eine über ein `function handle` gegebene Funktion. Verwenden Sie dazu eine Quadraturformel der Ordnung 3.

(c) Lösen Sie die Aufgabe mit $f = 2\,(x_1 + x_2)$ und $g = 1$ auf dem Einheitssimplex. Verwenden Sie dazu die in der Datei `Mesh_5_simplexg_Connectivity_P1P2.mat` gegebenen Gitter-Daten. Es handelt sich dabei um 5 Gitter, welche durch reguläre, uniforme Verfeinerung auseinander hervorgehen





d.h. $h_i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$ für $i = 1, \ldots, 5$. Zu diesem Problem existiert die klassische Lösung $u(x) = \lambda_0\,\lambda_1\,\lambda_2 + 1 = (1 - x_1 - x_2)\;x_1\,x_2 + 1$. Schätzen Sie die experimentelle Konvergenzordnung des Fehlers $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ bzgl. h auf diesen Gittern für $\mathbb{P}_1$- und $\mathbb{P}_2$-Elemente.

Aufgabe 31: Konvergenzeigenschaften für $u \notin H^2(\Omega)$

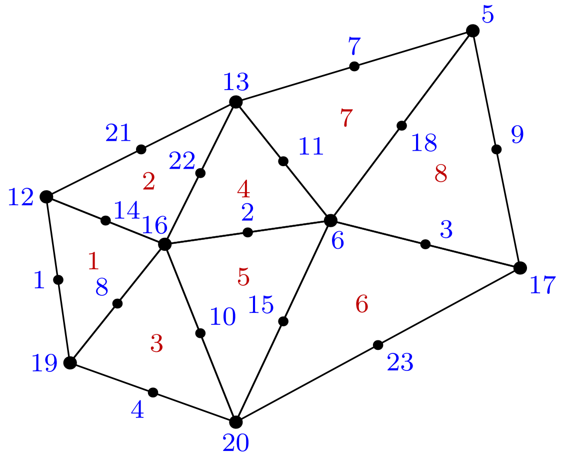
Untersuchen Sie experimentell die Konvergenzeigenschaften einer konformen Finite-Elemente-Methode für den Fall, dass u nicht in $H^2(\Omega)$ liegt.

Hausaufgabe 21: Quadraturformel zweiter Ordnung

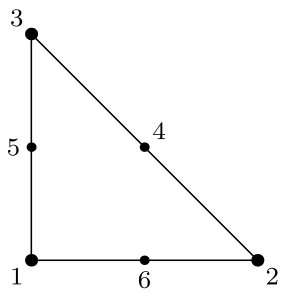
Zeigen Sie, dass die auf dem Beiblatt Quadraturfomeln angegebene Quadraturformel zweiter Ordnung tatsächlich von zweiter Ordnung ist, d.h. dass alle Funktionen $p \in P_2(K)$ exakt über K integriert werden (für ein beliebiges Dreieck K). (2 Punkte)

Hausaufgabe 22: Beispiel einer Connectivity-Matrix

Stellen Sie die Connectivity-Matrizen C_K $(K = 1, 2, 3)$ zu der Triangulierung



auf. Geben Sie nur die Nicht-Null-Elemente an. Die blau nummerierten Punkte repräsentieren globale Freiheitsgrade. Die Sortierung auf dem Referenzelement soll dabei gemäß



erfolgen. Geben Sie auch die alternative Connectivity-Matrix $\widehat{C}$ (nach Bemerkung 13.1) an. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Einträgen von $\widehat{C}$ und von C_K? (5 Punkte)

Hausaufgabe 23: Diagonale der Systemmatrix

Sei $\mathcal{T}$ ein Gitter und $a[\cdot,\cdot]$ eine (nicht notwendig symmetrische) Bilinearform. Weiterhin seien C_K die zellweisen Connectivity-Matrizen und A_K die lokalen Steifigkeitsmatrizen. Für die globalen Freiheitsgrade gelte die Voraussetzung (MAX1).

Zeigen Sie, dass für die Diagonale der globalen Steifigkeitsmatrix A

$$\operatorname{diag}(A) = \sum_{K\in\mathcal{T}} C_K \operatorname{diag}(A_K)\, C_K^\top$$

gilt. Hier bezeichnet $\operatorname{diag}(A)$ die Diagonalmatrix, die nur die Diagonale von A enthält. (2 Punkte)