
Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 10

Aufgabe 25: Lineare Unabhängigkeit der σ_i

Beweisen Sie Bemerkung 11.2.

Aufgabe 26: Ableitung einer Funktion in baryzentrischen Koordinaten

Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ das Einheitssimplex und $p : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in baryzentrischen Koordinaten gegebene Funktion. Wie lautet die Ableitung von p nach x_i für $i = 1, \dots, d$?

Aufgabe 27: Invarianz baryzentrischer Koordinaten unter affinen Transformationen

Es sei $K = \text{conv}\{a_0, \dots, a_d\} \subset \mathbb{R}^d$ ein Simplex und $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ die Funktion, welche einen Punkt $x \in K$ auf seine baryzentrischen Koordinaten bzgl. K abbildet. Weiter sei $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine affine Abbildung, d.h. $T(x) = Bx + b$ mit einer regulären Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\tilde{K} := T(K) = \text{conv}\{T(a_0), \dots, T(a_d)\},$$

und \tilde{K} ist wieder ein Simplex. Zeigen Sie, dass für die baryzentrischen Koordinaten $\tilde{\lambda}$ bzgl. \tilde{K} die Beziehung

$$\tilde{\lambda}(T(x)) = \lambda(x)$$

gilt, d.h. baryzentrische Koordinaten sind invariant unter affinen Transformationen.

Aufgabe 28: Baryzentrische Koordinaten

Es seien $\{a_0, \dots, a_d\} \subset \mathbb{R}^d$ affin unabhängige Punkte, d.h., $\{a_1 - a_0, \dots, a_d - a_0\}$ sind linear unabhängig. Dann ist ihre konvexe Hülle

$$K := \text{conv}\{a_0, \dots, a_d\} := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=0}^d \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \right\}$$

ein **Simplex** mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Die Zahlen $(\lambda_0(x), \dots, \lambda_d(x))$ wie oben heißen die **baryzentrischen Koordinaten** eines Punktes $x \in \mathbb{R}^d$. Sie lassen sich mit Hilfe des LGS

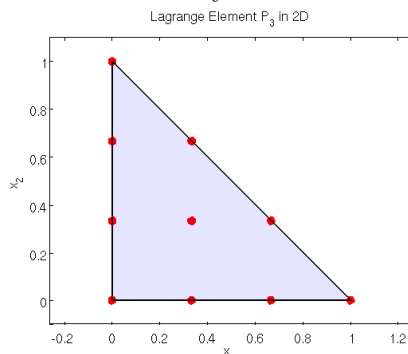
$$\sum_{i=0}^d \lambda_i a_i = x, \quad \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_d \\ | & | & \cdots & | \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnen. Es gilt: $x \in K \Leftrightarrow \lambda(x) \geq 0$. Außerdem ist $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$ und

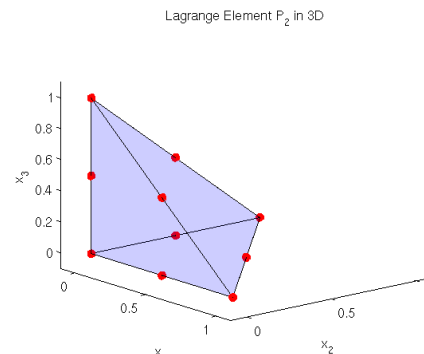
$$x \in F_i \Leftrightarrow \lambda(x) \geq 0, \quad \lambda_i(x) = 0,$$

wobei F_i die Facette ist, die der Ecke a_i gegenüber liegt.

- (a) Wie lauten die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes x im Einheitssimplex $\text{conv}\{0, e_1, \dots, e_d\}$?
 (b) Geben Sie die baryzentrischen Koordinaten der rot markierten Punkte in



und



(vgl. **Beiblatt Lagrange-Elemente**) an.

Wie lauten die baryzentrischen Koordinaten der Schwerpunkte der Facetten im rechten Bild?

- (c) Welche Punktmenge sind durch $\lambda_i = \text{const}$, $\sum_{j=0}^d \lambda_j = 1$ beschrieben?
 (d) Vergewissern Sie sich, dass λ eine affine Funktion von x ist. Zeigen Sie anschließend, dass λ die Darstellung

$$\lambda_i : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \lambda_i(x) = 1 - \frac{(x - a_i) \cdot n_i}{(a_j - a_i) \cdot n_i} \in \mathbb{R} \quad i = 0, \dots, d$$

hat. Dabei bezeichnet n_i einen Normalenvektor der Facette F_i und a_j einen beliebigen Eckpunkt der Facette F_i , d.h. $j \neq i$ (λ_i ist unabhängig von der Wahl von j).

Hausaufgabe 20: Zusammenhang verschiedener Gittergrößen

Es sei \mathcal{T} ein konformes Gitter aus Dreiecken ($d = 2$) bzw. Tetraedern ($d = 3$) auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Finden Sie für $d = 2$ einen „einfachen“ Zusammenhang (ohne Beweis) zwischen

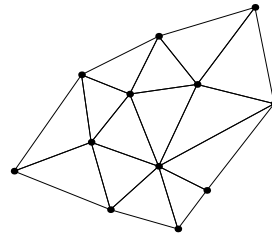
(a) N_{cells} , N_{edges} und N_{vertices} sowie

(b) N_{cells} , N_{edges} und $N_{\text{edges}}^{\partial}$

und für $d = 3$ zwischen

(a) N_{cells} , N_{faces} , N_{edges} und N_{vertices} sowie

(b) N_{cells} , N_{faces} und $N_{\text{faces}}^{\partial}$.



Wir verwenden folgende Bezeichnungen für die Bestandteile 1-, 2- und 3-dimensionaler Gitter:

Bezeichnung	Anzahl der ...	Dimension	$d = \dots$
N_{cells}	Zellen K	d	1,2,3
N_{faces}	Seitenflächen	2	3
$N_{\text{faces}}^{\partial}$	äußeren Seitenflächen	2	3
N_{edges}	Kanten	1	2,3
$N_{\text{edges}}^{\partial}$	äußeren Kanten	1	2,3
N_{vertices}	Knoten,	0	1,2,3
$N_{\text{vertices}}^{\partial}$	Randknoten	0	1,2,3

(4 Punkte)