

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 9

Aufgabe 23: Hermite-Formfunktionen in 1D

Analog zu Beispiel 11.8 lassen sich Hermitesche Elemente in 1D auf $K = [0, 1]$ mit $P = P_3(K)$ durch

$$\sigma_1(p) = p(0), \quad \sigma_2(p) = p'(0), \quad \sigma_3(p) = p(1), \quad \sigma_4(p) = -p'(1)$$

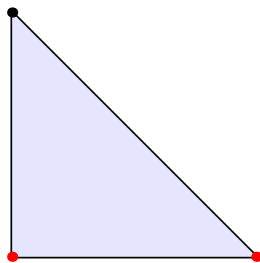
definieren. Wie lauten die zugehörigen Formfunktionen? Zeichnen Sie diese.

Aufgabe 24: Plotten verschiedener Formfunktionen von Lagrange-Elementen

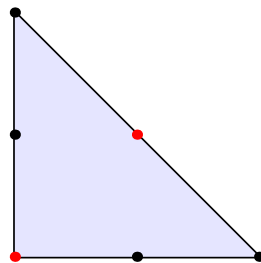
Zeichnen Sie für die in den folgenden Lagrange-Elementen mit rot markierten Freiheitsgrade die zugehörige Formfunktionen, z.B. in Matlab.

(a) \mathbb{P}_k (vgl. Beispiel 11.5) ($d = 2$)

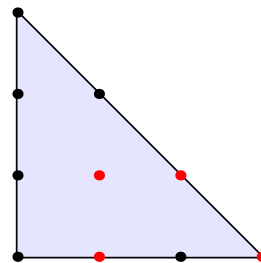
für $k = 1$



für $k = 2$

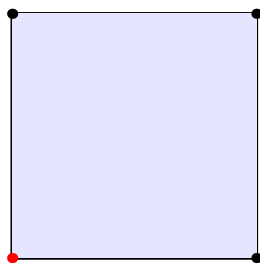


für $k = 3$

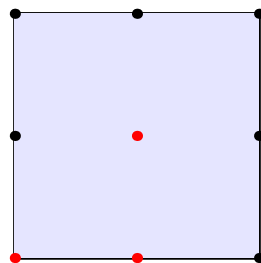


(b) \mathbb{Q}_k (vgl. Beispiel 11.7) ($d = 2$)

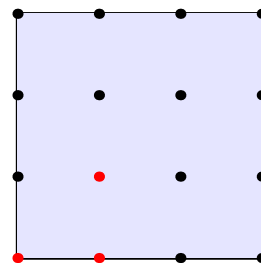
für $k = 1$



für $k = 2$



für $k = 3$

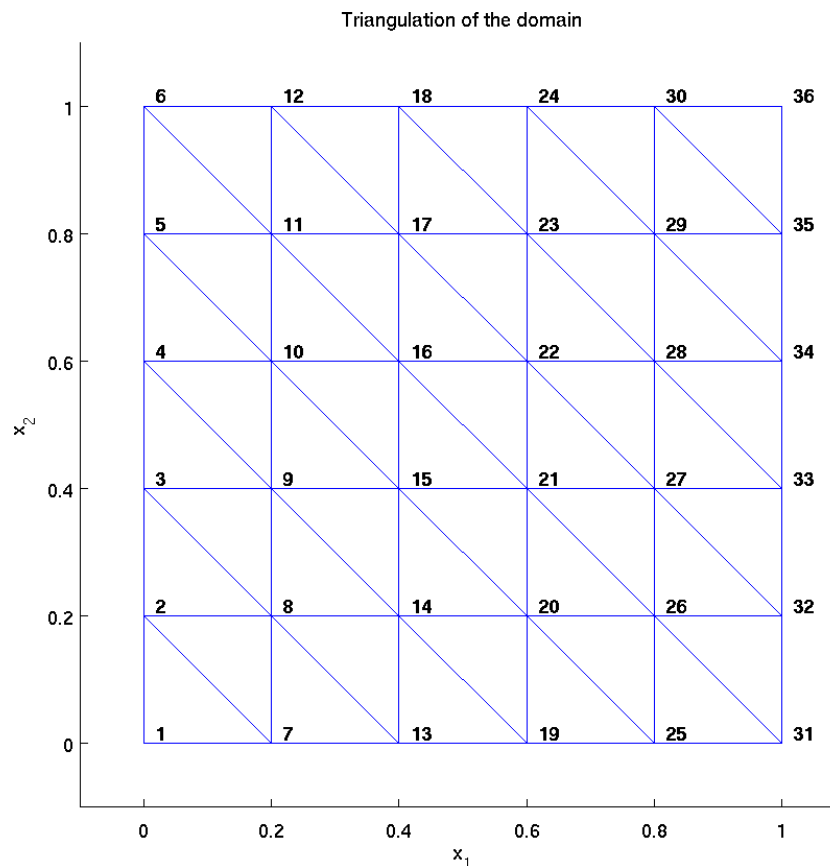


Hinweis: Zum Plotten von Funktionen auf rechteckigen Gebieten ist der Befehl `mesh` geeignet. Im Fall von Dreiecksgebieten ist dieser jedoch unpassend. Besser ist es dann, die Funktion als Punktwolke mit dem Befehl `plot3` zu zeichnen oder das Gebiet in viele „kleine“ Dreiecke zu unterteilen und auf diesen die Funktion mit dem Befehl `patch` darzustellen.

Hausaufgabe 18: Lösen und Plotten mittels FEM

Wir greifen das in Abschnitt § 10 vorgestellte Problem auf. Folgende Informationen sind in der Datei `Mesh_and_Stiffness_Matrix_6x6.mat` gespeichert:

- die Matrix `xi`, deren Spalten die Koordinaten der Punkte des Gitters enthalten,



- die Matrix `T`, welche die Dreiecksstruktur des Gitters enthält,
- die Steifigkeitsmatrix `A` (für alle 36 Basisfunktionen),
- die Vektoren `ix_inner` und `ix_bnd`, welche die Indizes der inneren bzw. Randknoten enthalten.

(a) Stellen Sie den zu $f = 1$ gehörigen Lastvektor auf und lösen Sie das zu (10.1) gehörende diskrete Problem.

(b) Plotten Sie die Lösung z.B. unter Verwendung des `patch`-Befehls.

Hinweis: Das Laden der Daten kann mit `load Mesh_and_Stiffness_Matrix_6x6` erfolgen. (3 Punkte)

Hausaufgabe 19: Aspektverhältnis und Formregularität

- (a) Wie lautet das Aspektverhältnis von
 - (a) einem gleichseitigen Dreieck,
 - (b) eines achsenparallelen d -dimensionalen Quaders sowie
 - (c) dem Einheitssimplex in \mathbb{R}^d ?
- (b) Zeigen Sie Bemerkung 14.15 (f). Folgern Sie daraus, dass es für die Formregularität einer Familie $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ von Dreiecksgittern notwendig und hinreichend ist, wenn der kleinste Winkel in jedem Dreieck der Familie größer als eine Konstante $c > 0$ ist, d.h. gleichmäßig von 0 entfernt ist.
- (c) Beweisen Sie, dass die alternative Definition von Formregularität aus Bemerkung 14.15 (b) äquivalent zur Definition 14.14 (c) ist.

Hinweis: Für konvexe Mengen $K \subset \mathbb{R}^d$ gilt (siehe P. Steinhagen, 1922)

$$\frac{\sqrt{d+2}}{d+1} \cdot \underline{d}_K \leq \varrho_K,$$

wobei \underline{d}_K die Breite von K , also den kleinsten Abstand zweier paralleler Stützhyperebenen, die K einschließen, bezeichnet.

(5 Punkte)