Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 19. Juni 2014
Abgabe am 25. Juni 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 8

Aufgabe 17: Beweis der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

Beweisen Sie die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung (Lemma 8.4 aus der Vorlesung).

Aufgabe 18: Wann ist im Céa-Lemma die Konstante 1?

Welche Bedingung muss die Bilinearform a im Céa-Lemma (Lemma 9.2) erfüllen, damit die dortige Abschätzung mit Konstante 1 gilt (d.h. $\frac{\alpha_0}{\beta_0} = 1$).

Aufgabe 19: Isomorphe Darstellungen von Funktionalen

Um eine eindeutige Lösung für das Poisson-Problem mit reinen Neumann-Randbedingungen (8.13) zu erhalten, muss man konstante Funktionen aus dem Lösungsraum „herausnehmen".

(a) Zeigen Sie, dass sich die natürliche Norm im Quotientenraum $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, also

$$\|[v]\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{w\in[v]} \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

durch

$$\|[v]\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \left\| v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \,\mathrm{d}x \right\|_{H^1(\Omega)}$$

ausdrücken lässt. Dabei bezeichnet $[v]$ die zu $v \in H^1(\Omega)$ gehörende Äquivalenzklasse.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ mit der obigen Norm isomorph zu

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v \,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

mit der $H^1(\Omega)$-Norm ist.

(c) Beweisen Sie mit dem Lemma von Lax-Milgram, dass für das Problem mit reinen Neumann-Randbedingungen im Raum V eine eindeutige Lösung existiert, die stetig von den Daten $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Gamma)$ abhängt.

(d) Man hätte auch mit dem zu V isomorphen Raum $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ arbeiten können. Damit dort das Funktional $\tilde{F}([v]) = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x + \int_\Gamma g\, v \,\mathrm{d}s$ wohldefiniert ist, benötigt man die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x + \int_\Gamma g \,\mathrm{d}s = 0.$$

Warum wurde diese in Aufgabenteil (c) nicht benötigt?

Hinweis: Es gilt die folgende Ungleichung (folgt sofort aus Aufgabe (noch nicht gestellt): `Sob_aufgabe005` (b))

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega u \,\mathrm{d}x \right)^2 \right)$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$ und eine Konstante c.

Aufgabe 20: Simulation des Fußbodenheizungs-Beispiels

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung an folgendem Beispiel:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\kappa\, \nabla y(x)) &= \chi_{\text{control}}\, u(x) && \text{in } \Omega \\ \kappa \frac{\partial}{\partial n} y(x) + \alpha(x)\, y(x) &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $y(x)$ die Temperatur im Punkt x, κ die in diesem Fall konstante Wärmeleitfähigkeit und $\alpha(x)$ den Wärmeübergangskoeffizienten. Die Steuerung $u(x)$ bezeichnet die Wärmeleistungsdichte im Punkt x.

Hinweis: Es bietet sich an, für jedes Beispiel einen Unterordner, hier zum Beispiel mit der Bezeichnung `Fussbodenheizung`, anzulegen, in dem sich die problemspezifischen Programmteile befinden.

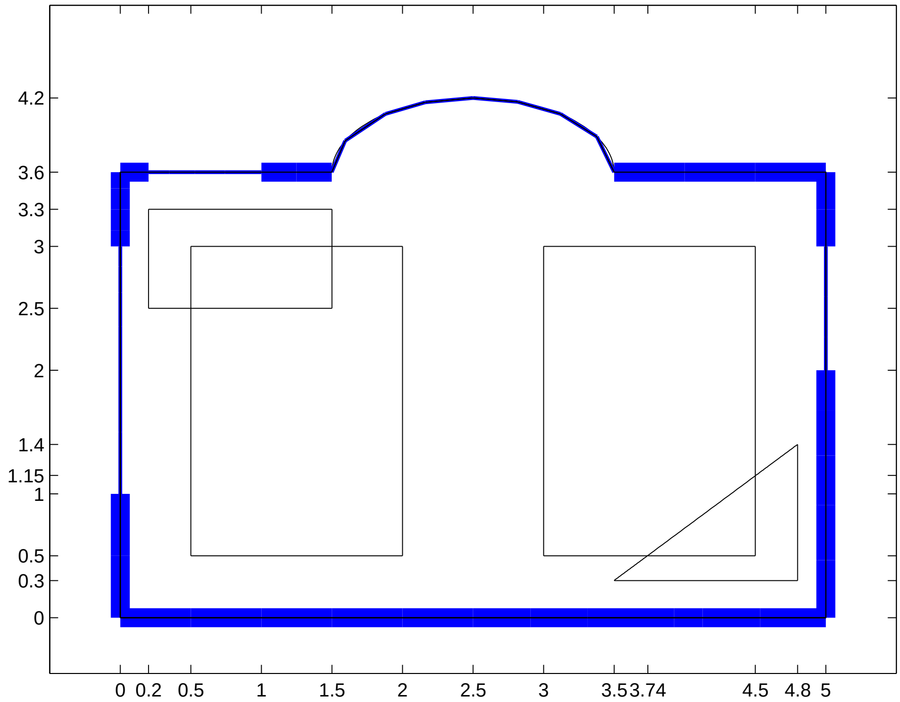
Benutzen Sie die PDE-Toolbox von Matlab für folgende Aufgaben:

(a) Konstruieren Sie mit Hilfe der GUI die folgene Geometrie. Stellen Sie dabei sicher, dass Ω_{Obs}, Ω_{ctrl} und alle Fenster als eigenständige Geometrieteile erstellt und dargestellt werden:

Hinweis: Es bietet sich an, Achsen und Ticks vorher gemäß der Achsenbezeichung einzustellen, um mit dem Grid Snapping arbeiten zu können.

(b) Was sagen die durch Draw ≫ Export Geometry Description, Set Formula, Labels erzeugten Variablen aus?

(c) Setzen Sie im Boundary Mode homogene Robin-Randbedingungen mit Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_{\text{wall}} = 1\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$ und $\alpha_{\text{window}} = 3\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$ an den Außenkanten der Geometrie. Entfernen Sie auch alle überflüssigen inneren Kanten.



(d) Exportieren sie mittels BOUNDARY $\gg$ EXPORT DECOMPOSED GEOMETRY, BOUNDARY COND'S die Matrizen `g` und `b`. Erzeugen Sie außerdem in der MATLAB-Konsole mit `wgeom` die Datei `geometry_Fussbodenheizung.m` sowie mit `wbound` die Datei `bc_Fussbodenheizung.m`.

(e) Speichern Sie das Modell mit SAVE AS unter `pdemodel_Fussbodenheizung.m` und kommentieren Sie diese. (Das Speichern des Modells dient nur dem Zweck der späteren Weiterbearbeitung in der GUI.)

Aufgabe 21: Zur Hilbertmatrix

Wir betrachten die Hilbertmatrix A mit Einträgen

$$A_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

die sich unter anderem als Steifigkeitsmatrix bei der Lösung der Aufgabe

$$-u'' = f \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u'(1) = 0$$

mit dem Ansatzraum

$$V_h = \operatorname{span}\Big\{ \underbrace{\frac{x^i}{i}}_{=:\varphi_i} \Big\}_{i=1}^{n},$$

d. h. Polynomen vom Höchstgrad n, ergibt.

Untersuchen Sie, bis zu welchem Grad n sich lineare Gleichungssysteme mit der Hilbertmatrix $A\,x = b$ in Matlab zuverlässig lösen lassen.
Hinweis: Die Inverse der Hilbertmatrix lässt sich explizit angeben. In Matlab stehen hierfür die Funktionen `hilb` und `invhilb` zur Verfügung.

Aufgabe 22: FEM in 1D

Lösen Sie die Aufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 1 \quad \text{auf } (0,1), \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

numerisch. Verwenden Sie dazu stückweise lineare Ansatzfunktionen. Überlegen Sie sich zunächst die Einträge in der Steifigkeitsmatrix K und im Lastvektor f. Berechnen Sie die exakte Lösung u_{exakt} und lösen Sie anschließend die diskretisierte Aufgabe mit Matlab und berechnen Sie die Fehler $|u_h - u_{\text{exakt}}|_1$ und $\|u_h - u_{\text{exakt}}\|_{L^2(0,1)}$ für verschiedene Gitterweiten h und schätzen Sie die Konvergenzordnung. Verwenden Sie zur Berechnung der Normen eine hinreichend genaue Integrationsformel (z.B. zusammengesetzte Simpson-Regel).

Hausaufgabe 17: Existenz einer Lösung für Aufgabe mit Konvektionsterm

Beweisen Sie Satz 8.12 aus der Vorlesung.

Hinweise: Zeigen Sie für (a) die Beziehung

$$(\beta \cdot \nabla u,\, u)_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\,(u,\, (\nabla \cdot \beta)\, u)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Dabei kann verwendet werden, dass die Formel der partiellen Integration auch für H^1-Funktionen gilt.

Verwenden Sie für Teil (b) die Young'sche Ungleichung in der Form

$$ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$$

mit $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$. (3 Punkte)