Technische Universität Chemnitz — Chemnitz, 13. Mai 2014
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt — Abgabe am 26. Mai 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 7

Aufgabe 16: Erste Schritte mit der Matlab-PDE-Toolbox

Ziel der Aufgabe soll es sein, sich mit den Funktionalitäten der grafischen Benutzeroberfläche der MATLAB-PDE-TOOLBOX vertraut zu machen. Deren grafische Oberfläche kann mittels `pdetool` aus der Matlab-Konsole aufgerufen werden.

(a) Machen Sie sich mit den Funktionen GRID, GRID SPACING und SNAP vertraut und erzeugen Sie einen Einheitskreis.

(b) Finden Sie heraus, welche PDE in der Standardeinstellung gelöst wird. Wechseln Sie dazu in den BOUNDARY MODE und in den PDE MODE.

(c) Erzeugen Sie ein Gitter auf dem Einheitskreis und verfeinern Sie dieses zweimal.

(d) Lösen Sie die PDE mittels `Solve PDE`.

(e) Ändern Sie nun die Randbedingungen im BOUNDARY MODE in homogene Neumann-Randbedingungen und lösen die veränderte Gleichung.

(f) Welche Lösung ergibt sich mit homogenen Neumann-Randbedingungen? Interpretieren Sie das Ergebnis.

(g) Wir betrachten nun die PDE

$$\begin{aligned} -\triangle y &= f \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} y + y &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Lösen Sie diese inhomogene Poisson-Gleichung mit rechter Seite $f(x) = \sin(\pi(x_2 - 2x_1))$. Experimentieren Sie mit den verschiedenen Plot-Routinen zur Darstellung der Lösung.

Hausaufgabe 13: Studium der PDE-Toolbox-Dokumentation

(a) Lesen Sie den Abschnitt **Solve PDEs Programmatically**, Seite 3–107 bis 3–112, im Partial Differential Equation Toolbox User's Guide.

(b) Machen Sie sich mit der Matlab-FEM-Syntax vertraut. Lesen Sie dazu die den Anfang des Kapitels **Finite Element Method**, Seite 5–1 bis 5–9.

(c) Studieren Sie die Hilfeseiten der Toolbox (`doc pde`). Sie benötigen in jedem Fall die Befehle `initmesh`, `assema`, `assemb`, `pdeplot` und `refinemesh`. Dabei sollten sie sich insbesondere mit dem Gitterformat `[p,e,t]` vertraut machen.

Hausaufgabe 14: Abhängigkeit der Beschränktheitskonstante des Lösungsoperators von der Wahl der Norm

Wie ändern sich die Konstanten in Satz 8.5, wenn man anstelle der $H^1(\Omega)$-Norm die auf $H_0^1(\Omega)$ äquivalente $H^1(\Omega)$-Seminorm wählt? (1 Punkt)

Hausaufgabe 15: Beweis des schwachen Maximumprinzips

Beweisen Sie Satz 8.6 aus der Vorlesung (Schwaches Maximumprinzip) für $f(x) \leq 0$ (fast überall).

Hinweise:

- Testen Sie die Gleichung mit der Funktion

$$u^+ = \max\{0, u\}.$$

  Für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ (vgl. Stampacchia-Lemma, Skript Sobolevräume Lemma 5.3).

(2 Punkte)

Hausaufgabe 16: Implementierung des instationären FDV für hyperbolische PDE

(a) Implementieren Sie in Matlab das Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung der hyperbolischen Aufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - \triangle u &= f && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0, T) \\ u_t &= v_0 && \text{auf } \Omega \times \{0\} \\ u &= u_0 && \text{auf } \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

(Gleichung (7.1) aus der Vorlesung) auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Implementieren Sie sowohl das explizite Leapfrog-Schema (7.2) als auch das implizite Schema (7.3). Nutzen Sie zur Unterscheidung wieder $\theta = 0$ für das explizite und $\theta = 1$ für das implizite Schema.

(b) Um das Verfahren zu testen, sei die exakte Lösung

$$u(x, t) = \sin(\sqrt{8}\, \pi\, t)\, \sin(2\, \pi\, x_1)\, \sin(2\, \pi\, x_2)$$

und $T = 1$ vorgegeben. Daraus sind

$$\begin{aligned} u_0(x) &:= u(x, 0) = 0, \\ v_0(x) &:= u_t(x, 0) = \sqrt{8}\, \pi\, \sin(2\, \pi\, x_1)\, \sin(2\, \pi\, x_2) \end{aligned}$$

bestimmt. (Beachte: $u_{tt} - \triangle u = 0$). Berechnen Sie $\|u - u_{h,\tau}\|_{\infty,h,\tau}$ für $h = 0.05$ für die mit `x` gekennzeichneten Kombinationen von θ und τ.

	$\theta = 0$	$\theta = 1$
$\tau = \frac{1}{2}h$	x	x
$\tau = \frac{1}{4}h$	x	x
$\tau = \frac{1}{8}h$	x	x

Was können Sie feststellen?

(c) Es sei $\tau_0 = 1/64$ und $h_0 = 1/4$. Berechnen Sie den Fehler $\|u - u_{h,\tau}\|_{\infty,h,\tau}$ für die mit `x` gekennzeichneten Kombinationen von h und τ jeweils für $\theta = 0$ und $\theta = 1$. Schätzen Sie (vgl. Übung 6, Hausaufgabe 11) die Konvergenzordnungen bzgl. h und τ (u, u_0, v_0 und T wie in Aufgabenteil (b)).

	$h = h_0 \cdot 2^0$	$h = h_0 \cdot 2^{-1}$	$h = h_0 \cdot 2^{-2}$	$h = h_0 \cdot 2^{-3}$
$\tau = \tau_0 \cdot 2^0$	x	x	x	x
$\tau = \tau_0 \cdot 2^{-1}$				x
$\tau = \tau_0 \cdot 2^{-2}$				x
$\tau = \tau_0 \cdot 2^{-3}$				x

(8 Punkte)