Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 13. Mai 2014
Abgabe am 19. Mai 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 6

Aufgabe 13: Beispiel unterschiedlich regulärer Funktionen

In welchem Raum $H^m(\Omega)$ (m positiv und ganzzahlig) liegen die folgenden Funktionen?

(a) $\Omega = (-1,\, 1)$, $f(x) = |x|$

(b) $\Omega = (-1,\, 1)$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x < 0 \\ x^3, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

(c) $\Omega = (0,\, 1)$, $f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$

Aufgabe 14: Kein stetiger Spuroperator für Funktionen in $L^p(\Omega)$

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Zeigen Sie, dass keine Konstante $c_\tau = c_\tau(\Omega) > 0$ existiert, sodass

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} \leq c_\tau \, \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

für alle $u \in C(\overline{\Omega})$ gilt.
Hinweis: Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 15: Implementierung des parabolischen FDV

(a) Implementieren Sie in Matlab das Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} u_t - \triangle u &= f && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0, T) \\ u &= u_0 && \text{auf } \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

(Gleichung (6.1) aus der Vorlesung) auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Lösen Sie dazu in jedem Zeitschritt die entsprechende elliptische Aufgabe.

(b) Um das Verfahren zu testen, sei die exakte Lösung

$$u(x, t) = e^{-8\pi^2 t} \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2)$$

und $T = 1$ vorgegeben. Daraus ist $u_0(x) := u(x, 0) = \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2)$ bestimmt. (Beachte: $u_t - \triangle u = 0$). Berechnen Sie $\|u - u_{h,\tau}\|_{\infty,h,\tau}$ für $h = 0.05$ für die mit `x` gekennzeichneten Kombinationen von θ und τ.

	$\theta = 0$	$\theta = 1$
$\tau = h^2$	x	x
$\tau = \frac{1}{2}h^2$	x	x
$\tau = \frac{1}{4}h^2$	x	x

Was können Sie feststellen?

(c) Es sei τ_0 der größte mögliche Wert von τ, damit das Crank-Nicolson-Verfahren für alle in der unteren Tabelle mit x gekennzeichneten Kombinationen von h und τ gerade noch die Stabilitätsbedingung (6.4) erfüllt. Bestimmen Sie τ_0 für $h_0 = 0.2$. Berechnen Sie den Fehler $\|u - u_{h,\tau}\|_{\infty,h,\tau}$ für die mit x gekennzeichneten Kombinationen von h und τ jeweils für $\theta = \frac{1}{2}$ und $\theta = 1$. Schätzen Sie (vgl. Hausaufgabe 11) die Konvergenzordnungen bzgl. h und τ (u, u_0 und T wie in Aufgabenteil (b)).

	$h = h_0 \cdot 2^0$	$h = h_0 \cdot 2^{-1}$	$h = h_0 \cdot 2^{-2}$	$h = h_0 \cdot 2^{-3}$
$\tau = \tau_0 \cdot 2^0$	x	x	x	x
$\tau = \tau_0 \cdot 2^{-1}$			x	
$\tau = \tau_0 \cdot 2^{-2}$			x	
$\tau = \tau_0 \cdot 2^{-3}$			x	

Hausaufgabe 11: Experimentelle Konvergenzordnung bzgl. zweier Ordnungen

(a) Es gelte die Beziehung

$$e_{h,\tau} = \mathcal{O}(h^p + \tau^q) = \mathcal{O}(h^p) + \mathcal{O}(\tau^q)$$

(vgl. Satz 6.1 und 6.4 aus der Vorlesung). Ziel ist es, analog zu Übung 4, Hausaufgabe 7, aus einer gegebenen Menge von „Messpunkten" die Konvergenzordnungen p und q zu schätzen, d.h. die experimentellen Konvergenzordnungen zu bestimmen. Wie kann mit dem Ansatz

$$e_{h,\tau} = C_1 h^p + C_2 \tau^q$$

aus den Daten

(a) $e_{h_1,\tau}$, $e_{h_2,\tau}$, $e_{h_3,\tau}$ mit $h_2 = rh_1$ und $h_3 = rh_2$ eine Schätzung für p

(b) e_{h,τ_1}, e_{h,τ_2}, e_{h,τ_3} mit $\tau_2 = s\tau_1$ und $\tau_3 = s\tau_2$ eine Schätzung für q

gewonnen werden?

(b) Schätzen Sie die Konvergenzordnungen p und q für die folgenden Messdaten

$\tau \backslash h$	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
2^{-2}	1.00E+00	8.13E-01	7.66E-01
2^{-3}	6.25E-01		
2^{-4}	4.38E-01		

(c) Zeichnen Sie die Funktion $e(h,\tau) = h^2 + 3\tau$ für $h \in [10^0,\ 10^{-3}]$ und $\tau \in [10^0,\ 10^{-6}]$ in einen „dreifach-logarithmischen“ Plot.

Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `mesh` zum zeichnen und legen Sie anschließend mit `set(gca,'Xscale','log')` die logarithmische Skalierung für alle drei Achsen fest.

(d) Was ist eine gute Strategie zur gleichzeitigen Reduktion von h und τ im Fall der Funktion $e(h,\tau)$ aus dem Teil (c)?

(4 Punkte)

Hausaufgabe 12: Implementierung FDV für RB 2. und 3. Art

Implementieren Sie in Matlab das Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung des Problems

$$L\,u := -\triangle u = f \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \quad \text{auf } \Gamma, \quad \alpha \geq 0,$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ (vgl. (5.22)). Implementieren Sie beide in der Vorlesung vorgeschlagene Verfahren. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass α auf dem ganzen Rand Γ konstant ist und $\alpha > 0$ erfüllt.

Um das Verfahren zu testen, sei die exakte Lösung $u(x) = e^{x_1 \cdot x_2} \cdot \sin(x_1^2)$ vorgegeben. Daraus bestimmt sich $f := -\triangle u$ und (für $\alpha = 1$) $g := \partial_n u + u$ entsprechend. Zeichnen Sie den Verlauf der Fehler $e_{\infty,h} := \|u - u_h\|_{\infty,h}$, $e_{0,h} := \|u - u_h\|_{0,h}$ und $e_{1',h} := \|u - h_h\|_{1',h}$ sowie die Kondition der Systemmatrix (bzgl. $\|\cdot\|_2$) in Abhängigkeit von h in doppelt logarithmische Plots ein. Bestimmen Sie auch jeweils die experimentelle Konvergenzordnung. (6 Punkte)