Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 5. Mai 2014
Abgabe am 12. Mai 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 5

Aufgabe 10: Konsistenzordnung der parabolischen Schemata

Beweisen Sie Satz 6.1 (a).

Aufgabe 11: FDV auf dem Einheitsquadrat

Implementieren Sie in Matlab das Finite-Differenzen-Verfahren mit dem 5-Punkte-Stern zur Lösung des Problems

$$\begin{aligned} L\,u := -\triangle u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Sie müssen das in der Vorlesung behandelte Verfahren leicht modifizieren, um die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen behandeln zu können. Nehmen Sie dazu die Gleichungen

$$u_h(x) = g(x) \qquad \text{für alle } x \in \Gamma_h$$

an entsprechender Stelle mit in die Systemmatrix auf.

Um das Verfahren zu testen, sei die exakte Lösung $u(x) = e^{x_1 \cdot x_2} \cdot \sin(x_1^2)$ vorgegeben. Daraus bestimmt sich $f := -\triangle u$ und $g := u|_\Gamma$ entsprechend. Zeichnen Sie den Verlauf der Fehler $e_{\infty,h} := \|u - u_h\|_{\infty,h}$, $e_{0,h} := \|u - u_h\|_{0,h}$ und $e_{1',h} := \|u - u_h\|_{1',h}$ sowie die Kondition der Systemmatrix (bzgl. der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$) in Abhängigkeit von h in doppelt logarithmische Plots ein. Bestimmen Sie auch die experimentelle Konvergenzordnung.

Hinweise:

- Verwenden Sie `sparse` Matrizen (`help sparse`). Weitere nützliche Befehle sind `speye`, `spdiags` und `kron`.
- Mit dem Aufruf `eigs(Lh,1)` kann der größte Eigenwert und mit `eigs(Lh,1,'SM')` der kleinste Eigenwert von `Lh` bestimmt werden.
- Eine Schätzung der Konditionszahl (bezüglich der 1-Norm) für `sparse` Matrizen erhält man mit `condest`.

Aufgabe 12: $I + \tau\theta L_h$ ist invers monoton

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **invers monoton**, wenn gilt: $Ax \leq Ay \Rightarrow x \leq y$ (komponentenweise). Zeigen Sie:

(a) Zu einer invers monotonen Matrix A existiert A^{-1} und es gilt $A^{-1} \geq 0$ (elementweise).

(b) Eine invers monotone Matrix A mit $A\vec{1} > \vec{0}$ erfüllt $\|A^{-1}\|_{\infty,\infty} \leq \|A^{-1}\vec{1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min_k (A\vec{1})_k}$.

Zeigen Sie schließlich, dass es sich bei $A = I + \tau\theta L_h$ (vgl. Beweis zu Satz 6.1) um eine invers monotone Matrix handelt und $\|A^{-1}\|_{\infty,\infty} \leq 1$ erfüllt ist.
Hinweis: Verfahre ähnlich zum Beweis von Satz 5.7 (diskretes Maximumprinzip).

Hausaufgabe 8: Entkoppeln der Zeitschritte

Schreiben Sie die Gleichungen in (6.2) als ein großes Gleichungssystem. Überlegen Sie sich eine geeignete Sortierung der Unbekannten im Orts-Zeit-Gitter. Machen Sie sich klar, dass die einzelnen Zeitschritte „entkoppeln“ und dass ein Informationstransport nur vorwärts in der Zeit stattfinden kann.
Hinweis: Es soll auf die Matrix L_h zurückgegriffen werden. (2 Punkte)

Hausaufgabe 9: Beweis der diskreten Poincaré-Friedrichs-Ungleichung im höherdimensionalen Quader

Beweisen Sie Gleichung (5.16') in Abschnitt § 5.4 aus der Vorlesung. (2 Punkte)

Hausaufgabe 10: Validierung der Konstanten in der diskreten Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

Die diskrete Poincaré-Friedrichs-Ungleichung für Quader in $\mathbb{R}^d$ gibt uns für Funktionen $u_h \in U_h^0$ die Abschätzung

$$\|u_h\|_{0,h} \leq C\,\|u_h\|_{1',h} \tag{5.16'}$$

mit einer Konstanten (vgl. Hausaufgabe 9)

$$C = \min\left\{\frac{1}{\sqrt{d}}\max_j(b_j - a_j),\ \min_j(b_j - a_j)\right\}. \tag{$*$}$$

(a) Formulieren Sie die Bestimmung der kleinstmöglichen Konstanten C als Optimierungsaufgabe.
Hinweis: Nutzen Sie dabei die Matrixdarstellung der Normen.

(b) Überzeugen Sie sich davon, dass die Lösung dieser Optimierungsaufgabe der Bestimmung des kleinsten Eigenwerts einer verallgemeinerten Eigenwertaufgabe

$$M\,u = \lambda\,K\,u$$

entspricht. Wie sind die Matrizen M und K zu wählen?

(c) Bestimmen Sie die Konstanten für zweidimensionale Quader $\Omega = (0, b) \times (0, 1)$ mit $b \in \{1, 2, 4, 8\}$ gemäß $(*)$. Überprüfen Sie diese Konstanten numerisch für Gitterweiten $h = 2^{-k}$ für $k \in \{1, \ldots, 5\}$.
Hinweis: Verwenden Sie hierfür die Matlab-Funktion `eigs`.