Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 4

Aufgabe 8: Besetzungsstruktur der Systemmatrix für verschiedene Sortierungen

Die Systemmatrix, welche aus (5.5) entsteht, hängt von der Sortierung der unbekannten Funktionswerte $u_{i,j}$ ab. Zeichnen Sie schematisch die Gestalt der Systemmatrix, falls die unbekannten Funktionswerte

(a) lexikographisch,

(b) diagonal,

(c) im Schachbrettmuster

sortiert werden.

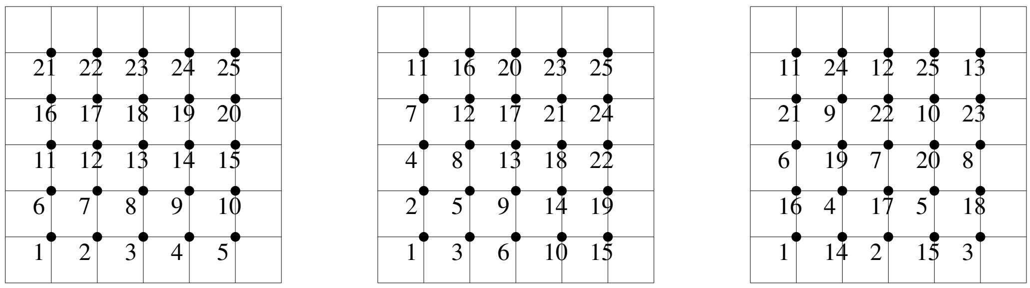

Abbildung 1: lexikographische, diagonale und Schachbrettmuster-Anordnung

Aufgabe 9: Quadratische Konsistenzordnung des 5-Punkte-Sterns numerisch verifizieren

Überprüfen Sie numerisch die quadratische Konsistenzordnung des 5-Punkte-Schemas (vgl. Satz 5.3). Verwenden Sie dafür die Funktion

$$u(x) = e^{x_1 \cdot x_2} \cdot \sin(x_1^2)$$

auf dem Einheitsquadrat. Bestimmen Sie zunächst

$$f := -\triangle u$$

exakt (von Hand oder z.B. mit Maple), und berechnen Sie anschließend den Konsistenzfehler

$$e_h := \left\| [-\triangle_h^{(5)} u] - f_h^{(1)} \right\|_{\infty,h}$$

für verschieden feine Gitterweiten h. Stellen Sie den Zusammenhang von h und e_h in einem doppelt logarithmischen Plot dar, und schätzen Sie die Konvergenzordnung wie in Hausaufgabe 7 (a) und (b) beschrieben.

Hausaufgabe 6: Eigenwerte des diskreten Laplace-Operators

Wir betrachten die Matrix zum 5-Punkte-Stern

$$L_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -I \\ & & & -I & T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n-1)^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass L_h die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda^{i,j} &= \frac{1}{h^2}\Big(4 - 2\left(\cos(i\,h\,\pi) + \cos(j\,h\,\pi)\right)\Big) \\ &= \frac{4}{h^2}\Big(\sin^2\big(\frac{i\,h\,\pi}{2}\big) + \sin^2\big(\frac{j\,h\,\pi}{2}\big)\Big) \qquad i,j = 1,\,\ldots,\,n-1 \end{aligned}$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$w^{i,j}(x_{k,m}) = \sin(i\pi kh)\,\sin(j\pi mh) \qquad k,m = 1,\,\ldots,\,n-1$$

besitzt. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren bezüglich des diskreten L^2-Skalarproduktes senkrecht aufeinander stehen.

(b) Zeigen Sie, dass für die Kondition bzgl. der Spektralnorm von L_h

$$\kappa_2(L_h) = \frac{\lambda_{\max}(L_h)}{\lambda_{\min}(L_h)} = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{h^2} + \mathcal{O}(1)$$

gilt.

(c) Was ändert sich an den Eigenwerten und der Kondition, wenn Gleichungen (entsprechend skaliert, siehe Bemerkung 5.5 (d)) für die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen in die Matrix mit aufgenommen werden? Was passiert, wenn man auf die Skalierung der Gleichungen verzichtet?

(5 Punkte)

Hausaufgabe 7: Bestimmung der experimentellen Konvergenzordnung

Häufig besteht zwischen der Norm des Fehlers $E_h := \|e_h\|$ und dem Diskretisierungsparameter h ein theoretischer Zusammenhang der Form

$$E_h \le Ch^p.$$

Um experimentell die vorausgesagte Konvergenzordnung p zu überprüfen, macht man den Ansatz

$$E_h \approx Ch^p,$$

wobei C sowie p unbekannt sind.

(a) Wie kann aus zwei Fehlern E_{h_1} und E_{h_2} die numerische (experimentelle) Konvergenzordnung p geschätzt werden?

(b) Die erhaltene Formel lässt sich als Anstieg der Gerade, welche die beiden Punkte (h_1, E_{h_1}) und (h_2, E_{h_2}) in einem doppelt logarithmischen Plot verbindet, interpretieren. Für mehrere Punkte $(h_1, E_{h_1}), \dots, (h_n, E_{h_n})$ $(n \ge 2)$ kann die Idee entsprechend verallgemeinert werden. Gesucht sind nun die Parameter C und p von einer Funktion Ch^p, welche die Punkte in einem doppelt logarithmischen Plot im Sinne der „kleinsten Quadrate“ am besten approximiert. Wie lautet das entsprechende „Kleinste-Quadrate-Problem“ und die zugehörige Normalengleichung?

(c) Schätzen Sie (wie in Teil (b) beschrieben) die Konstante C und Konvergenzordnung p für die folgenden Messdaten.

h	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
E_h	6.91e-01	1.78e-01	4.33e-02	1.78e-02	3.07e-03

Zeichnen Sie Messdaten und die Funktion Ch^p in einen doppelt-logarithmischen Plot ein.

(4 Punkte)