Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 15. April 2014
Abgabe am 28. April 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 3

Aufgabe 5: Beweis des Maximumprinzips

Beweisen Sie Satz 3.3 aus der Vorlesung.

Hinweis: Beweisen Sie (indirekt) zuerst die Aussage für den Fall $(L\,u)(x) = -\triangle u(x) < 0$ für alle $x \in \Omega$.

Aufgabe 6: Im Dunstkreis des 5-Punkte-Sterns

(a) Beweisen Sie Bemerkung 5.4 (a).

(b) Zeigen Sie, dass das 5-Punkte-Schema für den Fall $u \in C^3(\overline{\Omega})$ nur die Konsistenzordnung 1 hat.

Aufgabe 7: Implementierung verschiedener Normen

Für Funktionen $v_h, w_h \in V_h$ (bzw. U_h) definiert man

- die **diskrete L^∞-Norm** durch

$$\|v_h\|_{\infty,h} = \max_{x\in\Omega_h} |v_h(x)|$$

- das **diskrete L^2-Skalarprodukt** durch

$$(v_h, w_h)_h = h^d \sum_{x\in\Omega_h} v_h(x)\, w_h(x)$$

  und die zugehörige **diskrete L^2-Norm** durch

$$\|v_h\|_{0,h}^2 = h^d \sum_{x\in\Omega_h} |v_h(x)|^2$$

- die **diskrete H^1-Seminorm** durch

$$\|v_h\|_{1',h}^2 = h^d \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{x\in\overline{\Omega}_h \\ x+he_j\in\overline{\Omega}_h}} \big|[D_j^+ v_h](x)\big|^2$$

Hierbei bezeichnet Ω_h die inneren Gitterpunkte zur Gitterweite h. Implementieren Sie diese vier Funktionen in Matlab für den Fall, dass es sich bei Ω um das Einheitsquadrat ($d = 2$) handelt (vgl. § 5). Dabei wird der Funktion für die H^1-Seminorm ein Vektor $\vec{u}_h$ mit

$$\vec{u}_h = (\underbrace{u_{0,0}, u_{1,0}, \ldots, u_{n,0}}_{\text{0. Zeile}}, \underbrace{u_{0,1}, u_{1,1}, \ldots, u_{n,1}}_{\text{1. Zeile}}, \ldots, \underbrace{u_{0,n}, u_{1,n}, \ldots, u_{n,n}}_{n\text{. Zeile}})^\top$$

übergeben. Für $u_h \in U_h$ ist $u_{i,j}$ der Funktionswert an der Stelle $x_{i,j} = (ih, jh)^\top$. Hingegen wird den anderen Funktionen ein Vektor $\vec{v}_h$ mit

$$\vec{v}_h = (v_{1,1}, \ldots, v_{n-1,1}, \ldots, v_{1,n-1}, \ldots, v_{n-1,n-1})^\top$$

übergeben (dem Skalarprodukt werden natürlich zwei solcher Vektoren übergeben). Implementiere auch eine Funktion `Restrict_to_Inner`, welche die Randkomponenten von $\vec{u}_h$ abschneidet sowie eine Funktion `Extend_to_Boundary`, welche die fehlenden Randkomponenten von $\vec{v}_h$ mit 0 auffüllt.

Hausaufgabe 4: Schreibweise des 5-Punkte-Sterns mit Differenzenoperatoren

Beweisen Sie Gleichung (5.4), d.h.

$$[-\triangle_h^{(5)} u](x) = -\sum_{j=1}^{2} [D_j^- D_j^+ u](x).$$

Gilt auch

$$[-\triangle_h^{(5)} u](x) = -\sum_{j=1}^{2} [D_j^+ D_j^- u](x) \text{ ?}$$

(4 Punkte)

Hausaufgabe 5: Die Wellen- und Wärmeleitungsgleichung sind energieerhaltend

(a) Zeige, dass für die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \triangle u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0,T) \\ u &= u_0 && \text{auf } \Omega \times \{0\} \\ u_t &= v_0 && \text{auf } \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

die Energie (Summe aus kinetischer und potentieller Energie) zu jedem Zeitpunkt gleich ist, d.h. dass

$$\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

konstant über die Zeit ist. (3 Punkte)

(b) Zeige, dass für die instationäre Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_t - \triangle u &= 0 \quad && \text{in } \Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad && \text{auf } \Gamma \times (0,T) \\ u &= u_0 \quad && \text{auf } \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

die Wärmeenergie $Q(t) = \int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x$ konstant über die Zeit ist. (3 Punkte)

Hinweis: Multipliziere die Differentialgleichung mit einer geeignet gewählten Funktion und integriere partiell.