Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 11. April 2014
Abgabe am 23. April 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen
Übung 2

Aufgabe 3: Laplace-Operator in Polarkoordinaten

(a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator $\triangle$ für eine Funktion $u = (r,\, \varphi)$ in Polarkoordinaten $(r,\, \varphi) \in (0,\, \infty) \times [0,\, 2\pi)$ die Form

$$\triangle u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

hat. Verifizieren Sie, dass dies wieder ein elliptischer Differentialoperator ist.

(b) Für einen Winkel $\omega \in (0, 2\pi]$ sei $\Omega := \{(r,\, \varphi) : 0 < r < 1,\ \varphi \in (0,\, \omega)\}$ der zugehörige Sektor des Einheitskreises in der Ebene. Zeigen Sie, dass die auf Ω definierte Funktion

$$u(r,\, \varphi) := r^{\pi/\omega} \sin\left(\frac{\varphi\, \pi}{\omega}\right)$$

Lösung der PDE

$$\begin{aligned} -\triangle u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u(r,\, 0) &= 0 && \text{für } 0 \le r \le 1 \\ u(r,\, \omega) &= 0 && \text{für } 0 \le r \le 1 \\ u(1,\, \varphi) &= \sin\left(\frac{\varphi\, \pi}{\omega}\right) && \text{für } 0 \le \varphi \le \omega \end{aligned}$$

ist und dass sich die erste Ableitung $\partial u / \partial r$ für $\omega > \pi$ nicht stetig auf den Rand von Ω fortsetzen lässt, d.h. $u \notin C^1(\overline{\Omega})$.

Aufgabe 4: Maxwell-Gleichungen mit zeitharmonischem Ansatz

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben Phänomene des Elektromagnetismus, genauer den Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern untereinander sowie mit elektrischen Ladungen und elektrischem Strom.

In den Gleichungen treten folgende Größen auf:

Gesuchte Größe	Bedeutung	Einheit
$\vec{E}$	elektrische Feldstärke	V/m
$\vec{D}$	elektrische Flussdichte	C/m^2
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke	A/m
$\vec{B}$	magnetische Flussdichte	T

Gegebene Größe	Bedeutung	Einheit
$\vec{J}$	Stromdichte	$\mathrm{A/m^2}$
ρ	Ladungsdichte	$\mathrm{A\,s/m^3}$
ε	Permeabilität	$\mathrm{F/m}$
μ	Permittivität	$\mathrm{H/m}$
σ	elektrische Leitfähigkeit	$\mathrm{S/m}$

(a) Interpretieren Sie die Maxwell'schen Gleichungen:[1]

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

(b) Im Weiteren wollen wir von Materialeigenschaften ausgehen, die durch folgende **Materialgleichungen** bestimmt sind:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\, \varepsilon\, \vec{E},$$
$$\vec{B} = \mu_0\, \mu\, \vec{H},$$
$$\vec{J} = \sigma\, \vec{E},$$

wobei ε_0 und μ_0 die Permittivitäts- und Permeabilitätskonstante des Vakuums sind.

Ohne nun näher auf die genauen physikalischen Zusammenhänge einzugehen, wollen wir mit Hilfe eines **zeitharmonischen Ansatzes** ein vereinfachtes System von partiellen Differentialgleichungen herleiten. Dazu nehmen wir an, dass sich alle Felder (wie z. B. $\vec{D}$) als Produkt eines ausschließlich vom Ort abhängigen Vektorfelds $\bar{D}(x)$ und eines komplexwertigen Skalarfelds $\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$ mit gegebener Kreisfrequenz $\omega \geq 0$ zusammensetzen, d. h. $\vec{D}(x,t) = \bar{D}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$ usw. Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen und Materialgleichungen und dem zeitharmonischen Ansatz eine partielle Differentialgleichung her, die ausschließlich die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ bzw. die Amplitudenfunktion $\bar{E}$ als Unbekannte enthält.

(c) Wir nehmen im Weiteren an, dass die relative Permittivität ε durch

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

[1] Dabei gilt für einen Vektor $\vec{v}$ der Zusammenhang $\nabla \cdot \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$ und $\nabla \times \vec{v} = \operatorname{curl} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^\top$.

und die relative Permeabilität μ durch

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Leiten Sie mit Hilfe des Ansatzes

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{H} = \begin{pmatrix} H_x(x,y) \\ H_y(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine partielle Differentialgleichung für $E_z(x,y)$ her.

Hausaufgabe 3: Charakteristiken der Wellengleichung und d'Alembertsche Formel

(a) Bestimmen Sie die Charakteristiken für die Wellengleichung (vgl. Beispiel 2.6) mit Wellenausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$

$$u_{tt} - c^2 \triangle u = f$$

für den räumlich eindimensionalen Fall. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die d'Alembertsche Formel (vgl. Gleichung (3.2))

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[u_0(x + c\,t) + u_0(x - c\,t)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-c\,t}^{x+c\,t} v_0(s)\,\mathrm{d}s.$$

eine Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2\, u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{in } \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= v_0(x) && \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

liefert. (2 Punkte)