Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt

Chemnitz, 4. April 2014
Abgabe am 16. April 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen

Übung 1

Aufgabe 1: Herleitung der Wellengleichung

Leiten Sie aus geeigneten Annahmen für den örtlich eindimensionalen Fall die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 \triangle u = f$$

her und überführen Sie diese in die normierte Form (d.h. $c = 1$).

Aufgabe 2: Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Leiten Sie aus geeigneten Annahmen die instationäre Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - k \triangle u &= f \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

mit gegebener Anfangsbedingung u_0 her und lösen Sie diese mit `Matlab` in dem Gebiet $\Omega = (0,\, 1)$ bis zur Zeit $T = 0.3$ und für die folgenden Randbedingungen und Daten.

(a) Isolierende Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma \times (0, T)$$

mit $k \equiv 1$, $f \equiv 0$, $u_0(x) = \max\{\sin(3\,\pi\, x), 0\}$.

(b) Wie in (a) jedoch mit unstetiger Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (0,\, 1/2), \\ 1 & \text{für } x \in [1/2,\, 1). \end{cases}$$

(c) Wie in (b) jedoch mit (zeitunabhängigem) Quellterm

$$f(x, t) = 2\, u_0(x).$$

(d) Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{auf } \{0\} \times (0, T), \\ u &= 1 \quad \text{auf } \{1\} \times (0, T), \end{aligned}$$

mit $k \equiv 1$, $f \equiv 0$ und

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (0, 1/2), \\ 1 & \text{für } x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

(e) Wie in (d) jedoch mit (zeitunabhängigem) Quellterm

$$f(x, t) = 2\, u_0(x).$$

Hausaufgabe 1: Invarianz unter Koordinatentransformation

Zeigen Sie, dass die Klassifikation von linearen PDEs zweiter Ordnung (Definition 2.2) invariant gegenüber Koordinatentransformationen $y = F(x)$ ist. (3 Punkte)

Hausaufgabe 2: Klassifikation einiger PDEs

Klassifizieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

(a) $\partial_x \partial_y u - \partial_x u = 0$

(b) $\partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u + y \partial_y^2 u + 4u = 0$

(c) $2\left(\partial_x + \partial_y\right)^2 u + \partial_y u = 0$ (3 Punkte)