Numerik partieller Differentialgleichungen

Ein erstes Finite-Elemente-Verfahren

Idee des FE-Verfahrens: Zerlege Ω in einfache Teilgebiete. Approximiere V (z.B. $H^1(\Omega)$) durch einen Raum V_h von *stückweise* Polynomen auf diesen Teilgebieten.

Wir wählen als Modellproblem wieder die homogene Dirichlet-Aufgabe (8.1), also in schwacher Formulierung:

$$\text{Finde } u \in V = H_0^1(\Omega) \text{ mit } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f \, v \, \mathrm{d}x \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \tag{10.1}$$

Wir zerlegen („**triangulieren**“) $\overline{\Omega} = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ in regelmäßige Dreiecke $K_1, K_2, \ldots, K_{N_T}$ mit $h =$ Länge der Katheten.

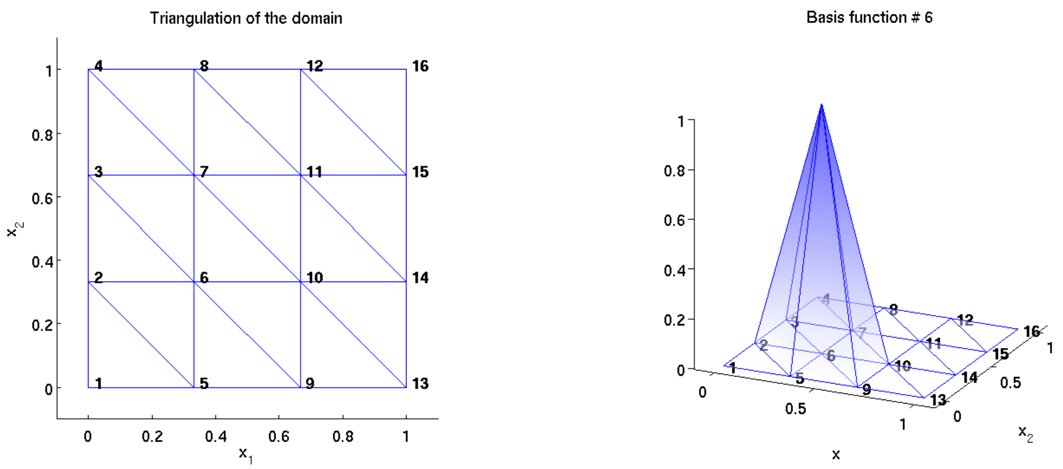

Abbildung 1: Grobe Triangulierung des Einheitsquadrates (mit $h = 1/3$) und eine Basisfunktion

Als globalen Ansatzraum (FE-Raum) wählen wir Funktionen, die stückweise lineare Polynome (sogenannte $\mathbb{P}_1$-Elemente) und global stetig sind:

$$V_h := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v_{|K_i} \text{ ist lineares Polynom}, \ v_{|\Gamma} = 0\}.$$

Beachte: Die Eigenschaft $V_h \subset V = H_0^1(\Omega)$ folgt später aus einem allgemeineren Resultat (Satz 12.7).