



TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Fakultät für Mathematik

Professur für Numerik (Partielle Differentialgleichungen)

Diplomarbeit

Elliptische Optimalsteuerungsprobleme unter Sparsity-Constraints

Gerd Wachsmuth

Chemnitz, den 18. September 2008

Betreuer: Prof. Dr. Roland Griesse

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Die Optimierungsaufgabe mit L^1-Kostenterm	6
2.1	Der Steuerungs-Zustands-Operator	6
2.2	Existenz und Eindeutigkeit der optimalen Lösung	8
2.3	Definition des Subdifferentials	10
2.4	Notwendige Bedingungen und Optimalitätssystem	11
2.5	Konstruktion von Optimalsteuerungsaufgaben mit dazugehörigen Lösungen	13
2.6	Konvergenz regularisierter Lösungen	15
2.7	Numerische Untersuchungen	28
3	Ein Problem mit streifenförmigen Lösungen	36
3.1	Eine Aufgabe mit L^2 -Norm	36
3.2	Numerische Verfahren für die L^2 -Aufgabe	40
3.3	Der passende Raum für das Zielfunktional	46
3.4	Optimalitätsbedingungen und Komplementaritätssystem	48
3.5	Numerische Berechnung	51
	Notation	58
	Abbildungsverzeichnis	59
	Literaturverzeichnis	60

Danksagung

Hiermit möchte ich allen Leuten danken, die mir beim Schreiben meiner Diplomarbeit und bei der Bewältigung meines Studiums behilflich waren.

Insbesondere möchte ich Herrn Prof. Dr. Roland Griesse danken, der durch viele Hinweise und Ratschläge zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat.

Bedanken möchte ich mich auch bei Frau Kreschnak vom Prüfungsamt, die einen sicher durch die Wirrungen der Prüfungsordnung führt.

Ein weiterer Dank gilt meinem Bruder Daniel Wachsmuth für die guten und hilfreichen Gespräche.

Vor allem möchte ich aber meiner Familie dafür danken, dass sie mich in allen Belangen unterstützt und oft geduldig die Gespräche mit meinem Bruder ertragen hat.

1 Einleitung

Zielfunktionale mit L^1 -Termen sind in vielen Teilgebieten der Optimierung aktuelles Forschungsgebiet. So wurden mit diesen nichtglatten Funktionalen zum Beispiel in der Bildverarbeitung oder Signalkomprimierung Fortschritte erzielt. In der optimalen Steuerung partieller Differentialgleichungen wurden diese Funktionale bisher vernachlässigt und es gibt nur eine Arbeit auf diesem Gebiet ([Sta08]).

In dieser Arbeit werden mehrere elliptische Optimalsteuerungsprobleme behandelt, die einen nichtglatten Anteil im Zielfunktional haben.

Die einfachsten Optimalsteuerungsprobleme haben die Form

$$J_1(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_2^2,$$

unter der Nebenbedingung, dass y die Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit rechter Seite u ist. Der Term $\|u\|_2^2$ im Zielfunktional, der eine Art Kosten darstellt, hat allerdings den Nachteil, dass er in manchen Bereichen der Praxis nichts mit den Kosten zu tun hat, die wirklich anfallen. Stellen wir uns als Problem die Erwärmung einer Platte vor. Dann ist u die über die Platte verteilte Wärmezufuhr. Die benötigte Heizleistung ist dann

$$P = \int_{\Omega} |u| \, dx.$$

Dies motiviert den Ansatz

$$J_2(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_2^2 + \beta \|u\|_1.$$

Es ist nun aber nicht möglich, dieses Problem mit dem (schnellen) semiglatten Newtonverfahren zu lösen. In [Sta08] wird nun der Regularisierungsterm $\|u\|_2^2$ wieder hinzugefügt und für das Zielfunktional

$$J_3(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_2^2 + \beta \|u\|_1$$

die Lösbarkeit mit dem semiglatten Newtonverfahren bewiesen. Weiterhin ergibt sich die Eigenschaft, dass die optimale Steuerung \bar{u} auf Teilen des Gebietes Ω identisch 0 ist. Dies gibt Auskunft darüber, an welchen Stellen des Gebietes sich die Platzierung von Aktuatoren (zum Beispiel Heizelementen) lohnt und an welchen Stellen diese zur Ersparnis von Kosten weggelassen werden können.

In dieser Arbeit wird nun untersucht, inwieweit der Regularisierungsparameter α einen Einfluss auf die Lösung des Optimierungsproblems hat. Bezeichnen wir die zu dem Parameter α gehörende Lösung mit u_α , so kann unter gewissen Voraussetzungen gezeigt werden, dass

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2 \leq C_d \cdot \alpha^d$$

für jedes $d < \frac{1}{3}$ und einer von d abhängigen Konstante C_d gilt (Satz 2.22).

Stellen wir uns nun die Situation vor, dass die zur Steuerung notwendigen Elemente nur streifenförmig produziert werden können. Wenn wir also zum Beispiel die Platte an einer Stelle wärmen wollen, dann liegt das Heizelement über die ganze Platte und es sind keine zusätzlichen Installationskosten nötig, um die Platte entlang des ganzen Streifens zu heizen. Damit ist es sinnvoll, ein Zielfunktional zu verwenden, mit dem die optimale Steuerung \bar{u} gerade streifenförmig wird.

In [GS08] wird vorgeschlagen das Zielfunktional

$$J_4(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_2^2 + \beta \int \left(\int u^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

zu nutzen. Dieses wird im letzten Kapitel dieser Arbeit untersucht und es zeigt sich, dass die Lösungen \bar{u} für dieses Zielfunktional gerade die gewünschte Eigenschaft besitzen. Zuvor wird noch ein Zielfunktional mit L^2 -Term

$$J_5(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_2^2 + \beta \|u\|_2$$

betrachtet, um Eigenschaften dieses Funktional zu studieren, damit diese Erkenntnisse bei der Behandlung des Zielfunktional J_4 angewendet werden können, welches ja eine L^2 -Norm in der y -Richtung beinhaltet.

Für die Lösung der Zielfunktionale J_4 und J_5 werden Optimalitätsbedingungen und mehrere numerische Verfahren hergeleitet, die auf dem semiglatten Newtonverfahren basieren, und diese werden bezüglich ihrer Konvergenzgeschwindigkeit verglichen. Es zeigt sich weiterhin, dass die Regularisierung dieser beiden Zielfunktionale mit einem Term der Form $\|u\|_2^2$ nicht notwendig ist, um die Konvergenz des semiglatten Newtonverfahrens zu zeigen.

2 Die Optimierungsaufgabe mit L^1 -Kostenterm

In diesem Kapitel soll folgende Optimalsteueraufgabe mit L^1 -Kontrollkostenterm untersucht werden:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimiere} \quad J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_d\|_2^2 + \beta \|u\|_1 \\ \text{unter} \quad (y, u) \in L^2 \times L^1 \\ \quad \quad u_a \leq u \leq u_b \\ \quad \quad -\Delta y = u \text{ in } \Omega \\ \quad \quad y = 0 \text{ auf } \Gamma \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Dabei sind $y_d \in L^2(\Omega)$, $u_a, u_b \in L^1(\Omega)$ und $\beta \geq 0$. Es gelte weiterhin $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$ ein offenes und beschränktes Gebiet. Weiterhin sei der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ ein $C^{1,1}$ -Rand oder Ω ein konvexes Polygon beziehungsweise ein konvexer Polyeder.

Eine ähnliche Aufgabe wird in [Sta08] behandelt. Stadler untersucht eine Optimalsteueraufgabe, in der das Zielfunktional die Form

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \|y_d - y\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_2^2 + \beta \|u\|_1$$

hat. Durch die L^2 -Norm im Zielfunktional ergibt sich als Raum für die Steuerung u der L^2 und für die Schranken wird $u_a, u_b \in L^2(\Omega)$ gefordert. Stadler untersucht den Fall $\alpha > 0$, aber einige seiner Ergebnisse können auch für $\alpha = 0$ und $u \in L^1(\Omega)$ gezeigt werden.

2.1 Der Steuerungs-Zustands-Operator

In diesem Abschnitt soll die Existenz eines Lösungsoperators für die partielle Differentialgleichung gezeigt werden. Die Inhomogenität der Differentialgleichung liegt hier nur in L^1 , daher muss zuerst definiert werden, was man unter einer schwachen Lösung der Differentialgleichung versteht. In diesen Abschnitt werden Ergebnisse aus [Cas86] verwendet.

Zunächst definieren wir den Hilbertraum $H = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, versehen mit der Norm aus $H^2(\Omega)$, sowie den Differentialoperator $A : H \rightarrow L^2(\Omega)$, $z \mapsto -\Delta z$. Aus [Cas86] erhalten wir, dass A ein Isomorphismus ist.

Da $H \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ (für $n \leq 3$) gilt, können wir $L^1(\Omega)$ in H^* einbetten. Dazu definieren wir die Einbettung $i : L^1(\Omega) \rightarrow H^*$, $\langle v, i\varphi \rangle_{H, H^*} := \int_\Omega v \cdot \varphi \, dx$ für $v \in H$ und $\varphi \in L^1(\Omega)$. Die adjungierte Einbettung i^* geht nun von H nach $L^\infty(\Omega)$ und damit können wir

die Funktionen aus H als Testfunktionen für die Differentialgleichung verwenden und erhalten für $z \in H$ in formaler Rechnung

$$\int_{\Omega} u \cdot z \, dx = \int_{\Omega} -\Delta y \cdot z \, dx = \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z \, dx = \int_{\Omega} -y \cdot \Delta z \, dx = \int_{\Omega} y \cdot Az \, dx$$

wobei die Randterme, die bei der partiellen Integration auftreten, wegen $z \in H$ und $y|_{\Gamma} = 0$ verschwinden. Damit ergibt sich für die Lösung folgende Definition.

2.1 Definition. Eine Funktion y heißt sehr schwache Lösung der Differentialgleichung aus (2.1), wenn $y \in L^2 \cap W_0^{1,1}$ und

$$\int_{\Omega} y \cdot Az \, dx = \int_{\Omega} u \cdot z \, dx \quad \forall z \in H \quad (2.2)$$

gilt.

2.2 Satz. Für alle $u \in L^1$ existiert eine Lösung y der schwachen Formulierung (2.2). Wir erhalten einen stetigen Steuerungs-Zustands-Operator $\mathcal{S} : L^1 \rightarrow L^2$.

Beweis. Wir betrachten $A^{-*} := (A^{-1})^* : H^* \rightarrow L^2$ und definieren $y = A^{-*}iu$. Wir erhalten für alle $f \in L^2$, dass

$$\int_{\Omega} y \cdot f \, dx = \int_{\Omega} A^{-*}iu \cdot f \, dx = \langle A^{-*}iu, f \rangle_{2,2} = \langle iu, A^{-1}f \rangle_{H^*,H} = \int_{\Omega} u \cdot A^{-1}f \, dx.$$

Da A und somit auch A^{-1} ein Isomorphismus ist, können wir $z = A^{-1}f$ setzen und erhalten für alle $z \in H$

$$\int_{\Omega} y \cdot Az \, dx = \int_{\Omega} u \cdot z \, dx.$$

Aus [Cas86, Theorem 4] erhalten wir schließlich $y \in W_0^{1,s}(\Omega)$ für $s \in [1, n/(n-1))$ und die stetige Abhängigkeit von y bezüglich u . Somit können wir $\mathcal{S} := A^{-*} \circ i$ definieren. ■

2.3 Lemma. Der Steuerungs-Zustands-Operator ist injektiv.

Beweis. Da \mathcal{S} linear ist, müssen wir nur $\ker \mathcal{S} = \{0\}$ zeigen. Gelte für $u \in L^1$, dass $\mathcal{S}u = 0$. Dann erhalten wir aus (2.2)

$$0 = \int_{\Omega} 0 \cdot Az \, dx = \int_{\Omega} u \cdot z \, dx \quad \forall z \in H.$$

Weiterhin erhalten wir durch die Zuordnung $l : \varphi \mapsto \int_{\Omega} u \cdot \varphi \, dx$ ein stetiges lineares Funktional aus $C_0(\Omega)^* = M(\Omega)$, wobei $M(\Omega)$ die regulären Borelmaße auf Ω sind. Wegen $C_0^\infty(\Omega) \subset H$ gilt $l(\psi) = 0$ für alle $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nun liegt aber $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $C_0(\Omega)$ bezüglich der Supremumnorm und somit erhalten wir $l(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0(\Omega)$. Dadurch ist $l = 0$ in $M(\Omega)$. Nun ist aber die Einbettung $L^1(\Omega) \hookrightarrow M(\Omega)$ injektiv und somit gilt $u = 0$. ■

Da für die notwendige Optimalitätsbedingung der adjungierte Operator benötigt wird, geben wir ihn gleich an.

2.4 Satz. Die Darstellung des adjungierten Operators $\mathcal{S}^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{S}^* = i^* A^{-1}, \quad (2.3)$$

wobei $i^* : H \rightarrow L^\infty(\Omega)$ die stetige Einbettung ist.

Beweis. Sei $y \in L^2(\Omega)$. Wir definieren $p := A^{-1}y$. Dann gilt wegen $p \in H$ für alle $\varphi \in L^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} y \cdot \mathcal{S}\varphi \, dx = \int_{\Omega} Ap \cdot \mathcal{S}\varphi \, dx = \int_{\Omega} p \cdot \varphi \, dx,$$

dies ist eine Folgerung aus der schwachen Formulierung (2.2). Das heißt, wir haben

$$\langle y, \mathcal{S}\varphi \rangle_{2,2} = \langle p, i\varphi \rangle_{H,H^*} = \langle i^*p, \varphi \rangle_{\infty,1} \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega).$$

Somit gilt $\mathcal{S}^*y = i^*p = i^*A^{-1}y$. ■

2.2 Existenz und Eindeutigkeit der optimalen Lösung

Der Beweis für die Existenz wird, wie in [Trö05], über die schwache Kompaktheit der zulässigen Menge geführt. Diese folgt allerdings nicht mehr aus dem Satz von Banach-Alaoglu-Bourbaki, da $L^1(\Omega)$ nicht reflexiv ist. Sie lässt sich aber mit Hilfe der oberen und unteren Schranke für die Steuerung beweisen:

2.5 Lemma. Für $u_a, u_b \in L^1(\Omega)$, $u_a \leq u_b$ ist die Menge $U_{ad} = \{u \in L^1(\Omega) : u_a \leq u \leq u_b \text{ f.ü. in } \Omega\}$ schwach kompakt.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $u_a = 0$. Wir definieren

$$K_n := \text{proj}[0, n] = \min(\max(\cdot, 0), n).$$

Gegeben sei nun eine Folge $\{u_n^{(0)}\}_{n=1}^\infty \subset U_{ad}$. Wir bilden nun eine Teilfolge, die in U_{ad} schwach konvergiert.

Für ein beliebiges m hat die Folge $\{K_m u_n^{(0)}\}_{n=1}^\infty$ eine beschränkte L^2 -Norm und enthält somit eine im L^2 schwach konvergente Teilfolge. Wir wählen nun von der Folge $\{u_n^{(0)}\}$ eine Teilfolge $\{u_n^{(1)}\}$, sodass $K_1 u_n^{(1)} \rightharpoonup U_1$ in L^2 . Von der Folge $\{u_n^{(1)}\}$ wählen wir nun eine Teilfolge $\{u_n^{(2)}\}$, sodass $K_2 u_n^{(2)} \rightharpoonup U_2$ in L^2 . Wir fahren fort und erhalten die Folgen $\{u_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty$, sowie die schwachen Grenzwerte U_m .

Nun bilden wir die Diagonalfolge $u_n = u_n^{(n)}$, dies ist eine Teilfolge von $\{u_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty$ und es gilt somit

$$K_m u_n \rightharpoonup U_m \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ in } L^2.$$

Für $n \geq m$ gilt $U_n = U_m$ auf $\{x \in \Omega : u_b(x) \leq m\}$, da $K_n u_i = K_m u_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$ auf dieser Menge gilt. Damit können wir

$$U(x) = U_{n(x)}(x), \text{ wobei } n(x) = \lceil u_b(x) \rceil$$

definieren und erhalten mit Hilfe der Ungleichungen $u_b \geq U \geq U_n \geq 0$

$$\|U - U_n\|_1 = \int_{\{u_b \geq n\}} |U - U_n| \, dx \leq \int_{\{u_b \geq n\}} u_b \, dx \rightarrow 0.$$

Damit gilt $U_n \rightarrow U$ in L^1 . Letztendlich erhalten wir für $\varphi \in L^\infty \subset L^2$

$$\langle u_n - U, \varphi \rangle_{1,\infty} = \langle u_n - K_m u_n, \varphi \rangle_{1,\infty} + \langle U_m - U, \varphi \rangle_{1,\infty} + \langle K_m u_n - U_m, \varphi \rangle_{1,\infty}.$$

Die ersten beiden Terme werden, unabhängig von n , für ein hinreichend großes m beliebig klein (wegen $K_m u_n \rightarrow u_n$ und $U_m \rightarrow U$ in L^1) und der letzte Term wird für ein fixiertes m und ein hinreichend großes n beliebig klein, da $K_m u_n \rightarrow U_m$ in L^2 und somit auch in L^1 . Damit gilt $\langle \varphi, u_n - U \rangle \rightarrow 0$ und somit

$$u_n \rightharpoonup U \text{ in } L^1(\Omega).$$

Da U_{ad} abgeschlossen und konvex ist, ist es auch schwach abgeschlossen und somit gilt $U \in U_{ad}$. Damit ist U_{ad} schwach kompakt. ■

Eine genaue Charakterisierung der schwach kompakten Mengen in L^1 findet man in [Alt99, S. 258]. Mit diesem Ergebnis lässt sich folgender schöner Satz zeigen, der für die weitere Arbeit nicht wichtig ist (die Fälle $p > 1$ folgen unter anderem daraus, dass L^p für $p > 1$ ein reflexiver Banachraum ist):

2.6 Satz. *Seien $1 \leq p < \infty$, $u_a, u_b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen, $u_a \leq 0 \leq u_b$ und $U_{ad} = \{u \in L^p(\Omega) : u_a \leq u \leq u_b \text{ f.ü. in } \Omega\}$. Dann gilt: U_{ad} ist in $L^p(\Omega)$ schwach kompakt genau dann, wenn $u_a, u_b \in L^p(\Omega)$.*

2.7 Lemma. *Das reduzierte Zielfunktional $\hat{J}(u) := J(\mathcal{S}u, u)$ ist streng konvex.*

Beweis. Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass $u \mapsto \|u\|_1$ konvex ist. Weiter gilt für $\lambda \in (0, 1)$ und $u, v \in L^1$, $u \neq v$

$$\|(1-\lambda)\mathcal{S}u + \lambda\mathcal{S}v - y_d\|_2^2 = (1-\lambda)^2\|\mathcal{S}u - y_d\|_2^2 + \lambda^2\|\mathcal{S}v - y_d\|_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle \mathcal{S}u - y_d, \mathcal{S}v - y_d \rangle.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} &\leq (1-\lambda)^2\|\mathcal{S}u - y_d\|_2^2 + \lambda^2\|\mathcal{S}v - y_d\|_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)\|\mathcal{S}u - y_d\|_2\|\mathcal{S}v - y_d\|_2 \\ &= [(1-\lambda)\|\mathcal{S}u - y_d\|_2 + \lambda\|\mathcal{S}v - y_d\|_2]^2 \\ &\leq (1-\lambda)\|\mathcal{S}u - y_d\|_2^2 + \lambda\|\mathcal{S}v - y_d\|_2^2. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Konvexität der reellen Funktion $x \mapsto x^2$. Die Gleichheit wird bei beiden Ungleichheitszeichen genau dann angenommen, wenn gilt

$$\langle \mathcal{S}u - y_d, \mathcal{S}v - y_d \rangle = \|\mathcal{S}u - y_d\|_2\|\mathcal{S}v - y_d\|_2 \text{ und } \|\mathcal{S}u - y_d\|_2 = \|\mathcal{S}v - y_d\|_2.$$

Da aber $\mathcal{S}u \neq \mathcal{S}v$ kann nicht bei beiden Ungleichheitszeichen Gleichheit gelten. Also ist $u \mapsto \|\mathcal{S}u - y_d\|_2^2$ und damit auch \hat{J} streng konvex. ■

Nun können wir mit Hilfe der Kompaktheit der zulässigen Menge die Existenz und Eindeutigkeit einer optimalen Lösung zeigen.

2.8 Satz. *Die Aufgabe (2.1) hat genau eine optimale Lösung.*

Beweis. Da \hat{J} durch 0 nach unten beschränkt ist, existiert, unter Beachtung der Nebenbedingungen von (2.1), $\inf \hat{J}$ und wir erhalten eine Folge $\{u_n\} \in U_{ad}$ mit

$$\hat{J}(u_n) \rightarrow \inf \hat{J} =: j.$$

Da U_{ad} in L^1 schwach kompakt ist, folgt, dass eine Teilfolge existiert, die schwach gegen ein $\bar{u} \in U_{ad}$ konvergiert. Diese Teilfolge nennen wir wieder u_n .

Da das reduzierte Zielfunktional \hat{J} stetig und konvex im L^1 ist, ist es auch schwach unterhalbstetig (siehe zum Beispiel [Trö05]). Das heißt, dass

$$\forall \{v_n\} \subset L^1: v_n \rightharpoonup v \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{J}(v_n) \geq \hat{J}(v).$$

Nun erhalten wir

$$j = \liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{J}(u_n) \geq \hat{J}(\bar{u}) \geq j,$$

woraus folgt, dass \bar{u} eine optimale Lösung ist. Aus der strengen Konvexität von \hat{J} folgt schließlich, dass die Lösung eindeutig ist. ■

2.3 Definition des Subdifferentials

Dieser Abschnitt soll eine Einführung in das Kalkül des Subdifferentials geben. Zu Grunde liegt dabei [IT79].

Aus verschiedenen Gründen bietet es sich an, konvexe Funktionen als Funktionen auf die erweiterten reellen Zahlen zu definieren:

2.9 Definition. Sei X ein Banachraum. Eine Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt konvex, falls der Epigraph

$$\text{epi} f := \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X : \alpha \geq f(x)\}$$

konvex ist. Weiterhin wird mit

$$\text{dom} f := \{x \in X : f(x) < \infty\}$$

der effektive Definitionsbereich bezeichnet. Schließlich heißt eine Funktion eigentlich, falls

$$\text{dom} f \neq \emptyset \text{ und } f(x) > -\infty \quad \forall x \in X$$

gilt.

2.10 Definition. Sei f eine konvexe, eigentliche Funktion auf X . Dann heißt die Menge

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* : f(z) - f(x) \geq \langle z - x, x^* \rangle \quad \forall z \in X\}$$

das Subdifferential von f im Punkt x . Die Elemente des Subdifferentials heißen Subgradienten.

2.11 Satz (Moreau-Rockafellar). *Es seien f_1, f_2 konvexe eigentliche Funktionen auf X . Dann gilt für alle $x \in X$*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

Ist eine der Funktionen stetig in einem Punkt, der dem effektiven Definitionsbereich der anderen Funktion angehört, so gilt

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

für alle $x \in X$.

2.12 Lemma. *Sei f eine konvexe eigentliche Funktion auf X . Ist f im Punkt x Gâteaux-differenzierbar mit Gâteauxableitung $f'(x)$, so gilt*

$$\partial f(x) = \{f'(x)\}.$$

2.4 Notwendige Bedingungen und Optimalitätssystem

In diesem Abschnitt sollen notwendige Bedingungen bewiesen und daraus ein Optimalitätssystem hergeleitet werden.

In [IT79, Seite 72] wird für eine konvexe Minimierungsaufgabe eine notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingung in subdifferentieller Form formuliert und es ergibt sich für die Aufgabe (2.1) und optimaler Steuerung \bar{u}

$$0 \in \partial \hat{J}(\bar{u}) + N(\bar{u} \mid U_{ad}), \quad (2.4)$$

wobei $N(\bar{u} \mid U_{ad}) := \{\lambda \in L^\infty(\Omega) : \langle u - \bar{u}, \lambda \rangle \leq 0 \quad \forall u \in U_{ad}\}$ der Normalenkegel an die Menge U_{ad} im Punkt $\bar{u} \in U_{ad}$ ist. Damit existiert ein $\lambda^* \in \partial \hat{J}(\bar{u}) \cap -N(\bar{u} \mid U_{ad})$. Also gilt

$$\langle u - \bar{u}, \lambda^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (2.5)$$

Der nächste Schritt ist nun die Bestimmung des Subdifferentials von \hat{J} .

2.13 Lemma. *Die Funktion $u \mapsto \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_2^2$ ist Gâteaux-differenzierbar von $L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ und der Repräsentant ihrer Gâteauxableitung ist*

$$S^*(Su - y_d) \in L^\infty(\Omega).$$

Beweis. Wir definieren $f : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_2^2$. Nun bestimmen wir zuerst die Richtungsableitung in die Richtung d .

$$f(x + td) - f(x) = \langle Su - y_d, Std \rangle + \frac{1}{2} \langle Std, Std \rangle = t \langle Su - y_d, Sd \rangle + \frac{1}{2} t^2 \langle Sd, Sd \rangle.$$

Damit erhalten wir die Richtungsableitung

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} = \langle Sd, Su - y_d \rangle = \langle d, S^*(Su - y_d) \rangle_{1, \infty}.$$

Wegen $S^*(Su - y_d) \in L^\infty(\Omega)$ ist die Richtungsableitung stetig von der Richtung abhängig und wir erhalten die Gâteauxableitung als lineares Funktional aus $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$

$$f'(u) = S^*(Su - y_d). \quad \blacksquare$$

2.14 Lemma. *Das Subdifferential der Funktion $u \mapsto \|u\|_1$ an der Stelle \bar{u} ist*

$$\partial\|u\|_1 = \{\lambda \in L^\infty(\Omega) : \lambda = 1 \text{ auf } \{u > 0\}, \lambda = -1 \text{ auf } \{u < 0\}, |\lambda| \leq 1 \text{ fast überall}\}.$$

Beweis. Aus [IT79, Seite 56] erhalten wir für das Subdifferential einer Norm

$$\partial\|x\| = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1, \langle x, x^* \rangle = \|x\|\}.$$

Für unseren Fall ergibt sich

$$\partial\|u\|_1 = \left\{ \lambda \in L^\infty(\Omega) : \|\lambda\|_\infty \leq 1, \int_\Omega \lambda u \, dx = \int_\Omega |u| \, dx \right\}.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$\partial\|u\|_1 = \{\lambda \in L^\infty(\Omega) : \lambda = 1 \text{ auf } \{u > 0\}, \lambda = -1 \text{ auf } \{u < 0\}, |\lambda| \leq 1 \text{ fast überall}\}. \quad \blacksquare$$

Aus den vorangegangenen Lemmata und mit dem Satz von Moreau-Rockafellar erhalten wir schließlich

2.15 Satz. *Das Subdifferential der Funktion \hat{J} an der Stelle \bar{u} ist*

$$\partial\hat{J}(\bar{u}) = \mathcal{S}^*(\mathcal{S}\bar{u} - y_d) + \beta \cdot \partial\|\bar{u}\|_1.$$

Durch die Konvexität von \hat{J} erhalten wir mit einem $\bar{\lambda} \in \beta \cdot \partial\|\bar{u}\|_1$ für die Optimalsteueraufgabe folgende Variationsungleichung, die die optimale Lösung charakterisiert

$$\langle u - \bar{u}, \bar{\lambda} - \bar{p} \rangle_{1,\infty} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}, \quad (2.6)$$

wobei mit $\bar{p} := \mathcal{S}^*(y_d - \mathcal{S}\bar{u})$ der zu \bar{u} gehörende, adjungierte Zustand bezeichnet wird. Wenn wir nun wie in [Trö05, Seite 57] vorgehen, erhalten wir eine punktweise Variationsungleichung.

2.16 Satz. *Eine Funktion $\bar{u} \in U_{ad}$ ist genau dann eine Lösung der Aufgabe (2.1), wenn für ein $\bar{\lambda} \in \partial\|\bar{u}\|_1$ und adjungierten Zustand \bar{p} für fast alle $x \in \Omega$*

$$\left(\bar{\lambda}(x) - \bar{p}(x) \right) \cdot (v - \bar{u}(x)) \geq 0 \quad \forall v \in [u_a(x), u_b(x)] \quad (2.7)$$

gilt.

Beweis. Wie in [Trö05]. \blacksquare

2.17 Satz. *Sei $\bar{u} \in U_{ad}$ und \bar{p} der zugehörige adjungierte Zustand. \bar{u} ist genau dann optimal für (2.1), wenn es Multiplikatoren $\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_a, \bar{\lambda}_b \in L^\infty(\Omega)$ gibt, sodass*

$$-\bar{p} + \bar{\lambda} - \bar{\lambda}_a + \bar{\lambda}_b = 0 \quad (2.8a)$$

$$\bar{\lambda}_a(\bar{u} - u_a) = 0, \bar{\lambda}_a \geq 0, (\bar{u} - u_a) \geq 0 \quad (2.8b)$$

$$\bar{\lambda}_b(u_b - \bar{u}) = 0, \bar{\lambda}_b \geq 0, (u_b - \bar{u}) \geq 0 \quad (2.8c)$$

$$\bar{\lambda} \in \beta \cdot \partial\|\bar{u}\|_1 \quad (2.8d)$$

gilt.

Beweis. Wir beweisen zuerst „ \Rightarrow “. Sei \bar{u} die optimale Steuerung und $\bar{\lambda}$ das Element aus dem Subdifferential (vergleiche (2.6)). \bar{u} erfüllt dann für fast alle $x \in \Omega$

$$\bar{u}(x) = \operatorname{argmin}_{v \in [u_a(x), u_b(x)]} (-\bar{p}(x) + \bar{\lambda}(x)) \cdot v.$$

Aus der Analysis dieser eindimensionalen Aufgabe erhalten wir, dass $\bar{\lambda}_a(x), \bar{\lambda}_b(x)$ existieren, die

$$\begin{aligned} -\bar{p}(x) + \bar{\lambda}(x) - \bar{\lambda}_a(x) + \bar{\lambda}_b(x) &= 0 \\ \bar{\lambda}_a(x)(\bar{u}(x) - u_a(x)) = 0, \bar{\lambda}_a(x) \geq 0, (\bar{u}(x) - u_a(x)) \geq 0 \\ \bar{\lambda}_b(x)(u_b(x) - \bar{u}(x)) = 0, \bar{\lambda}_b(x) \geq 0, (u_b(x) - \bar{u}(x)) \geq 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Damit gilt (2.8). $\bar{\lambda}_a, \bar{\lambda}_b \in L^\infty(\Omega)$ erhalten wir aus (2.8a), $\lambda_a, \lambda_b \geq 0$ und $\bar{p}, \bar{\lambda} \in L^\infty(\Omega)$.

Nun ist noch „ \Leftarrow “ zu zeigen. Gelte das Optimalitätssystem für \bar{u} und \bar{p} . Wir erhalten

$$\langle u - \bar{u}, -\bar{p} + \bar{\lambda} \rangle_{1,\infty} = \langle u - \bar{u}, \bar{\lambda}_a \rangle_{1,\infty} - \langle u - \bar{u}, \bar{\lambda}_b \rangle_{1,\infty} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Damit gilt (2.6) und somit ist \bar{u} optimale Steuerung. ■

Wie in [Sta08] können wir nun $\bar{\mu} = \bar{\lambda} - \bar{\lambda}_a + \bar{\lambda}_b$ setzen. Aus Gleichung (2.8a) ergibt sich $\bar{\mu} = \bar{p}$ und wir erhalten eine äquivalente Formulierung des Optimalitätssystems.

$$-\bar{p} + \bar{\mu} = 0 \quad (2.9a)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} - \max(0, \bar{u} + c(\bar{\mu} - \beta)) - \min(0, \bar{u} + c(\bar{\mu} + \beta)) \\ + \max(0, (\bar{u} - u_b) + c(\bar{\mu} - \beta)) + \min(0, (\bar{u} - u_a) + c(\bar{\mu} + \beta)) = 0 \end{aligned} \quad (2.9b)$$

Eine weitere Möglichkeit, das Optimalitätssystem zu formulieren, ist $(\bar{u}, \bar{\mu}) \in K := \{(u, \mu) \in U_{ad} \times H : (u = u_a \text{ und } \mu \leq -\beta) \text{ oder } (u \leq 0 \text{ und } \mu = -\beta) \text{ oder } (u = 0 \text{ und } |\mu| \leq \beta) \text{ oder } (u \geq 0 \text{ und } \mu = \beta) \text{ oder } (u = u_b \text{ und } \mu \geq \beta)\}$. Dies kann man auch wie in Abbildung 2.1 graphisch veranschaulichen.

2.5 Konstruktion von Optimalsteuerungsaufgaben mit dazugehörigen Lösungen

Das Optimalitätssystem aus dem vorherigen Abschnitt erlaubt es, Optimalsteuerungsaufgaben zu konstruieren, für die die Lösung bekannt ist. Dabei kann man die optimale Steuerung \bar{u} und den adjungierten Zustand \bar{p} fast beliebig wählen.

Zuerst wählt man Steuerung und adjungierten Zustand $\bar{u} \in L^1(\Omega)$, $\bar{p} \in H$, sowie $\beta > 0$ und $u_a, u_b \in L^1(\Omega)$, sodass das Optimalitätssystem (2.8) erfüllt ist. Eigentlich bildet der adjungierte Operator S^* nur in den $L^\infty(\Omega)$ ab, aber aus Satz 2.4 erhalten wir, dass $\bar{p} \in H$ und somit müssen wir das bei der Wahl von \bar{p} berücksichtigen.

Nun erhalten wir

$$\bar{y} = S\bar{u}$$

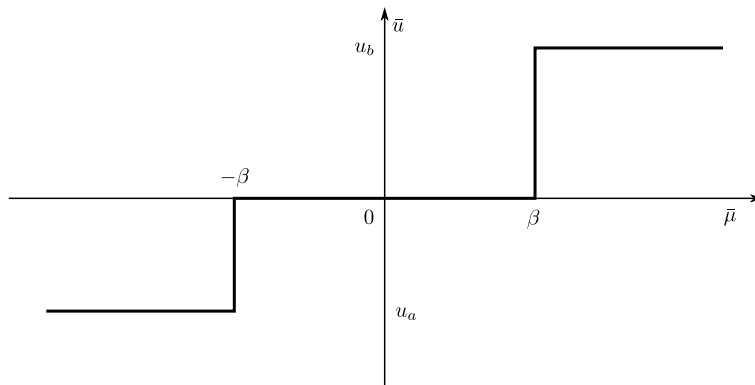


Abbildung 2.1: Darstellung der Komplementaritätsbedingung $(\bar{u}, \bar{\mu}) \in K$

und mit der Wahl

$$y_d = \bar{y} - \Delta \bar{p}$$

ergibt sich, dass \bar{u} eine optimale Steuerung von (2.1) ist.

Dadurch, dass die Konstruktion viele Möglichkeiten offen lässt, kann man Beispiele mit bestimmten Eigenschaften konstruieren oder Beispiele, bei denen gewisse Regularitätseigenschaften nicht gelten.

Zuerst wollen wir eine Aufgabe angeben, bei der die Lösung \bar{u} für $\varepsilon > 0$ nicht in $L^{1+\varepsilon}(\Omega)$ liegt. Hierzu muss dies natürlich für mindestens eine der Schranken u_a , u_b gelten. Wir wählen nun $\beta = \frac{1}{4}$ und $\Omega = (-1, 1)$, $u_a = -1$, $u_b(x) = 1 + \frac{1}{|x| \ln^2(|x|/2)}$. Damit gilt $u_b \in L^1(\Omega) \setminus L^{1+\varepsilon}(\Omega)$ für alle $\varepsilon > 0$. Weiterhin wählen wir $\bar{p}(x) = 1 - x^2$. Damit ergibt sich aus der Komplementaritätsbedingung für \bar{u}

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq \frac{1}{2} \\ u_b(x) & \text{für } |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

und somit liegt auch \bar{u} nicht in $L^{1+\varepsilon}(\Omega)$. y_d ergibt sich nun aus der oben angegebenen Formel.

Als nächstes wollen wir ein Beispiel konstruieren, sodass $\bar{u} \in H$ gilt. Dazu muss $|\bar{p}| = \beta$ auf einer Menge mit positivem Maß gelten, damit \bar{u} nicht von 0 auf u_a oder u_b springt. Wir wählen β beliebig, $-u_a = u_b = 1$, $\Omega = (0, 1)$. $\bar{p} \in H$ sei nun derart, dass $\bar{p}(x) = \beta$ für $x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ und $0 \leq \bar{p} \leq \beta$ gilt. Nun wählen wir noch \bar{u} so, dass $\bar{u}(x) = 0$ für $x \notin [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ gilt. Auf der Menge $x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ können wir nun $\bar{u}(x) > 0$ beliebig wählen und dies ist natürlich auch so möglich, dass $\bar{u} \in H \cap U_{ad}$.

Zuletzt soll noch eine Aufgabe angegeben werden, bei der die Lösung \bar{u} in einem gewissen Sinne zerfasert ist, nämlich so, dass die Menge $\bar{u} \neq 0$ aus abzählbar viele Intervallen besteht. Dafür können wir \bar{p} wie im vorhergehenden Beispiel wählen und ändern \bar{u} nur auf der Menge $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ ab. Auf der ersten Hälfte dieser Menge setzen wir \bar{u} auf 1, auf dem nächsten Viertel auf 0 dann auf dem nächsten Achtel wieder auf 1 und so weiter. Damit erhalten wir die gewünschte Eigenschaft.

2.6 Konvergenz regularisierter Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir die L^2 -regularisierte Aufgabe

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimiere} \quad J(y, u) := \frac{1}{2}\|y - y_d\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|u\|_2^2 + \beta\|u\|_1 \\ \text{unter} \quad (y, u) \in L^2 \times L^2 \\ \quad \quad u_a \leq u \leq u_b \\ \quad \quad -\Delta y = u \text{ in } \Omega \\ \quad \quad y = 0 \text{ auf } \Gamma \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

mit $\alpha \geq 0$ betrachten. Die Voraussetzungen sind wie für (2.1) und zusätzlich $u_a, u_b \in L^2(\Omega)$. Damit erhalten wir zusätzlich die Bedingung, dass $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ für die Lösung \bar{u} gilt, auch wenn $\alpha = 0$. Diese Aufgabe wurde bei [Sta08] behandelt und es wurde ein semiglattes Newtonverfahren mit superlinearer Konvergenz hergeleitet. Da es sich gezeigt hat, dass man für die nichtregularisierte Aufgabe das verallgemeinerte Newtonverfahren nicht verwenden kann, wollen wir dessen Lösung durch die regularisierten Lösungen approximieren.

In [Sta08] wurde die Abhängigkeit der Lösung \bar{u} vom Parameter β untersucht. Um nun die Abhängigkeit von α zu untersuchen, bezeichnen wir nun mit $u_\alpha, y_\alpha, p_\alpha$ die eindeutige optimale Steuerung, den optimalen Zustand und den optimalen adjungierten Zustand. Als Optimalitätssystem für diese Aufgabe ergibt sich

$$-p_\alpha + \alpha u_\alpha + \underbrace{\lambda - \lambda_a + \lambda_b}_{=:\mu_\alpha} = 0 \quad (2.11a)$$

$$\lambda_a(u_\alpha - u_a) = 0, \lambda_a \geq 0, (u_\alpha - u_a) \geq 0 \quad (2.11b)$$

$$\lambda_b(u_b - u_\alpha) = 0, \lambda_b \geq 0, (u_b - u_\alpha) \geq 0 \quad (2.11c)$$

$$\lambda \in \beta \cdot \partial\|u_\alpha\|_1. \quad (2.11d)$$

Auch dieses Optimalitätssystem können wir wieder als $(\bar{u}, \bar{\mu}) \in K$ formulieren und wir erhalten als Darstellung wieder Abbildung 2.1.

Wenn wir nun wegen Gleichung (2.11a) μ_α statt p_α in der Darstellung verwenden, erhalten wir Abbildung 2.2.

Wir definieren nun noch die Abbildung $\Phi : [0, \infty) \rightarrow L^2(\Omega), \alpha \mapsto u_\alpha$.

2.18 Satz. *Die Abbildung Φ ist für $\alpha > 0$ lokal Lipschitzstetig. Insbesondere gilt*

$$\|u_\alpha - u_{\alpha'}\|_2 \leq \frac{C_{U_{ad}}^{(1)}}{\alpha} |\alpha - \alpha'| \quad \text{für } \alpha' \geq 0,$$

mit $C_{U_{ad}}^{(1)} := \max_{u \in U_{ad}} \|u\|_2 = \|\max(u_b(x), -u_a(x))\|_2$.

Beweis. Sei $\alpha > 0, \alpha' \geq 0$. Dann folgt aus (2.11a)

$$\begin{aligned} 0 &= -p_\alpha + p_{\alpha'} + \alpha u_\alpha - \alpha' u_{\alpha'} + \mu_\alpha - \mu_{\alpha'} \\ &= \mathcal{S}^* \mathcal{S}(u_\alpha - u_{\alpha'}) + \alpha(u_\alpha - u_{\alpha'}) - (\alpha' - \alpha)u_{\alpha'} + \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}. \end{aligned}$$

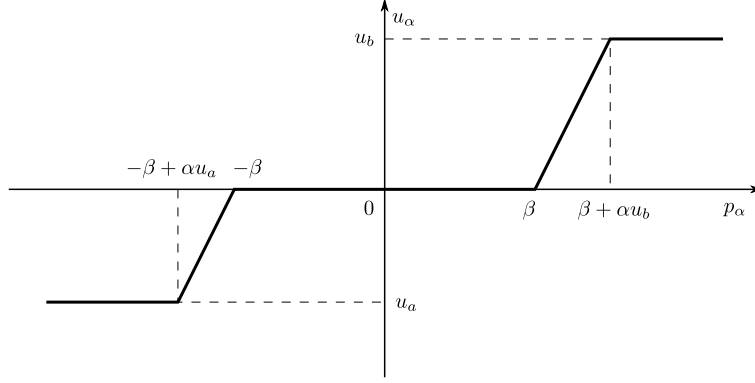


Abbildung 2.2: Darstellung der Komplementaritätsbedingung für (u_α, p_α)

Multiplizieren mit $u_\alpha - u_{\alpha'}$ und Integrieren über Ω liefert

$$\|\mathcal{S}(u_\alpha - u_{\alpha'})\|_2^2 + \alpha \|u_\alpha - u_{\alpha'}\|_2^2 - (\alpha' - \alpha) \langle u_{\alpha'}, u_\alpha - u_{\alpha'} \rangle = -\langle \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, u_\alpha - u_{\alpha'} \rangle$$

Nun folgt $\langle \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, u_\alpha - u_{\alpha'} \rangle \geq 0$ sofort aus den Komplementaritätsbedingungen (vergleiche Abbildung 2.1). Daraus erhalten wir, dass $(\mu_\alpha - \mu_{\alpha'})(u_\alpha - u_{\alpha'}) \geq 0$ punktweise gilt. Insbesondere ist zum Beispiel der Fall $\mu_\alpha < \mu_{\alpha'}$ und $u_\alpha > u_{\alpha'}$ nicht möglich, da aus $u_\alpha > u_{\alpha'}$ sofort $\mu_\alpha \geq \mu_{\alpha'}$ folgt.

Somit haben wir

$$\|\mathcal{S}(u_\alpha - u_{\alpha'})\|_2^2 + \alpha \|u_\alpha - u_{\alpha'}\|_2^2 \leq (\alpha' - \alpha) \langle u_{\alpha'}, u_\alpha - u_{\alpha'} \rangle \quad (2.12)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha \|u_\alpha - u_{\alpha'}\|_2^2 &\leq (\alpha' - \alpha) \langle u_{\alpha'}, u_\alpha - u_{\alpha'} \rangle \\ &\leq |\alpha' - \alpha| |\langle u_{\alpha'}, u_\alpha - u_{\alpha'} \rangle| \\ &\leq |\alpha' - \alpha| \|u_{\alpha'}\|_2 \|u_\alpha - u_{\alpha'}\|_2 \\ \|u_\alpha - u_{\alpha'}\|_2 &\leq \frac{C_{U_{ad}}^{(1)}}{\alpha} |\alpha - \alpha'| \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Dieses Resultat reicht aber noch nicht aus, um $u_\alpha \rightarrow u_0$ für $\alpha \rightarrow 0$ zu zeigen. Setzen wir nämlich $\alpha' = 0$, so ergibt sich nur

$$\|u_\alpha - u_0\|_2 \leq C_{U_{ad}}^{(1)}.$$

2.19 Satz. *Es gilt $u_\alpha \rightarrow u_0$ in $L^2(\Omega)$ für $\alpha \rightarrow 0$. Weiterhin gilt $\|y_\alpha - y_0\|_2 \leq \sqrt{\alpha} C_{U_{ad}}^{(1)}$ und $\|p_\alpha - p_0\|_\infty \leq \sqrt{\alpha} \|\mathcal{S}^*\| C_{U_{ad}}^{(1)}$.*

Beweis. Aus (2.12) erhalten wir

$$\|\mathcal{S}(u_\alpha - u_0)\|_2^2 \leq \alpha \langle u_0, u_0 - u_\alpha \rangle \leq \alpha \cdot C.$$

Da $A^* : L^2(\Omega) \rightarrow H^*$ stetig ist, gilt weiterhin

$$\|i(u_0 - u_\alpha)\|_{H^*} = \|A^* \underbrace{A^{-*}i}_{\mathcal{S}}(u_0 - u_\alpha)\|_{H^*} \leq \|A^*\| \cdot \|\mathcal{S}(u_0 - u_\alpha)\|_2 \leq \sqrt{\alpha \cdot C} \|A^*\| \rightarrow 0.$$

Nun gilt für ein beliebiges $z \in H$

$$\begin{aligned} \langle u_0, u_0 - u_\alpha \rangle &= \int_{\Omega} (u_0 - u_\alpha) \cdot z \, dx + \int_{\Omega} (u_0 - u_\alpha) \cdot (u_0 - z) \, dx \\ &= \langle z, i(u_0 - u_\alpha) \rangle_{H, H^*} + \langle u_0 - u_\alpha, u_0 - z \rangle_{2,2} \\ &\leq \|i(u_0 - u_\alpha)\|_{H^*} \|z\|_H + \|u_0 - u_\alpha\|_2 \|u_0 - z\|_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Da $\|u_0 - u_\alpha\|_2$ beschränkt ist und H dicht in $L^2(\Omega)$ liegt, können wir z so wählen, dass

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2 \|u_0 - z\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Da $\|i(u_0 - u_\alpha)\|_{H^*}$ gegen 0 geht, können wir schließlich α so klein wählen, dass auch

$$\|i(u_0 - u_\alpha)\|_{H^*} \|z\|_H \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

und somit

$$\langle u_0, u_0 - u_\alpha \rangle \leq \varepsilon$$

gilt. Aus (2.12) erhalten wir noch

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2^2 \leq \langle u_0, u_0 - u_\alpha \rangle \leq \varepsilon.$$

Damit haben wir $u_\alpha \rightarrow u_0$. Nun gilt es noch $\|y_\alpha - y_0\|_2 \leq \sqrt{\alpha} \cdot C_{U_{ad}}^{(1)}$ zu zeigen. Wenden wir wieder (2.12) an, erhalten wir

$$\|y_\alpha - y_0\|_2^2 = \|\mathcal{S}(u_\alpha - u_0)\|_2^2 \leq \alpha \langle u_\alpha, u_0 - u_\alpha \rangle \leq \alpha (C_{U_{ad}}^{(1)})^2$$

und somit

$$\|y_\alpha - y_0\|_2 \leq \sqrt{\alpha} \cdot C_{U_{ad}}^{(1)}.$$

Die Abschätzung für $\|p_\alpha - p_0\|_\infty$ folgt sofort aus der Stetigkeit von \mathcal{S}^* . ■

Bei genauer Betrachtung wird es deutlich, dass diese Beweismethode es nicht erlaubt, eine Konvergenzrate zu beweisen. Dazu wäre es nötig, eine Abschätzung für die H -Norm von z , welche für $u_0 \notin H$ und $z \rightarrow u_0$ in L^2 gegen ∞ geht, treffen zu können. Da aber u_0 im Allgemeinen eine sehr schlechte L^2 -Funktion sein kann (siehe Abschnitt 2.5), ist es nicht möglich, gleichzeitig die Konvergenz $z \rightarrow u_0$ in L^2 zu garantieren.

Versucht man zum Beispiel den Ansatz über eine Faltung mit einem Glättungskern, so erhält man für einen Glättungskern δ

$$\begin{aligned}
(u_0 \star \delta)(x) &= \int \delta(x-y)u_0(y) \, dy \\
\|u_0 \star \delta - u_0\|_2^2 &= \int \left(\int \delta(x-y)u_0(y) \, dy - \int \delta(x-y)u_0(x) \, dy \right)^2 \, dx \\
&= \int \left(\int \delta(x-y)(u_0(y) - u_0(x)) \, dy \right)^2 \, dx \\
&\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int \left(\int \delta(x-y) \, dy \int \delta(x-y)(u_0(y) - u_0(x))^2 \, dy \right) \, dx \\
&= \int \left(\int \delta(x-y)(u_0(x) - u_0(y))^2 \, dy \right) \, dx \\
&= \int \left(\int \delta(-\hat{y})(u_0(x) - u_0(x + \hat{y}))^2 \, d\hat{y} \right) \, dx \\
&= \int \left(\int \delta(-\hat{y})(u_0(x) - u_0(x + \hat{y}))^2 \, dx \right) \, d\hat{y} \\
&= \int \delta(-y)\|u_0 - \tau_y u_0\|_2^2 \, dy, \tag{2.14}
\end{aligned}$$

wobei τ_y die Verschiebung einer Funktion ist, also $\tau_y u : x \mapsto u(x+y)$.

Man weiß zwar nun, dass $\|u_0 - \tau_y u_0\|_2 \rightarrow 0$ gilt, aber man kann dafür keine Konvergenzrate angeben, da diese stark von u_0 abhängt und beliebig schlecht sein kann.

Haben wir aber zusätzliches Wissen über die Regularität von u_0 , so können wir eine Konvergenzrate angeben.

Für den (entarteten) Fall $u_0 \in H$ erhalten wir

2.20 Satz. Für $u_0 \in H$ erhalten wir eine Konvergenzrate von $1/2$, also

$$\|u_0 - u_\alpha\| \leq C \cdot \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Mit (2.12), (2.13) und $z = u_0$ erhalten wir

$$\|A^\star\|^{-2} \|i(u_0 - u_\alpha)\|_{H^\star}^2 \stackrel{(2.12)}{\leq} \alpha \langle u_0, u_0 - u_\alpha \rangle \stackrel{(2.13)}{\leq} \alpha \|i(u_0 - u_\alpha)\|_{H^\star} \|u_0\|_H.$$

Damit gilt

$$\|i(u_0 - u_\alpha)\|_{H^\star} \leq \|A^\star\|^2 \|u_0\|_H \cdot \alpha$$

und mit (2.12), (2.13) haben wir schließlich

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2 \leq \|A^\star\| \|u_0\|_H^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

■

Auch für den Ansatz der Faltung von u_0 mit einem Glättungskern erhalten wir eine Konvergenzrate.

2.21 Satz. Sei $\beta > 0$, u_a, u_b konstant und $\mu(\{|p_0| = \beta\}) = 0$. Weiterhin seien $m_a(\varepsilon)$, $m_b(\varepsilon)$ Maße für den Umfang von $A^- := \{u_0 = u_a\}$ und $A^+ := \{u_0 = u_b\}$ derart, dass

$$\begin{aligned}\mu((A^+ + U_\varepsilon(0)) \setminus A^+) &= m_b(\varepsilon) \cdot \varepsilon, \\ \mu((A^- + U_\varepsilon(0)) \setminus A^-) &= m_a(\varepsilon) \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

gilt, wobei μ das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n bezeichnet. Außerdem seien $m_a(\varepsilon)$, $m_b(\varepsilon)$ beschränkt für $\varepsilon \rightarrow 0$. Dann erhalten wir eine Konvergenzrate von $\frac{1}{15}$, dass heißt

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2 \leq C \cdot \alpha^{\frac{1}{15}}.$$

Beweis. In diesem Beweis werden mit C verschiedene Konstanten bezeichnet.

Aus der Komplementaritätsbedingung (2.8) und aus der obigen Voraussetzung, dass $\mu(\{|p| = \beta\}) = 0$, folgt, dass u_0 nur die Werte $\{u_a, 0, u_b\}$ annehmen kann. Wir denken uns nun u_0 außerhalb von Ω durch 0 auf ganz \mathbb{R}^n erweitert. Dann erhalten wir für $y \in \mathbb{R}^n$

$$u_0 - \tau_y u_0 = u_a \cdot \chi_{(A^-)} - u_a \cdot \chi_{(A^- - y)} + u_b \cdot \chi_{(A^+)} - u_b \cdot \chi_{(A^+ - y)}.$$

Und weiter

$$|u_0 - \tau_y u_0| \leq |u_a| \cdot \chi_{(A^- \Delta (A^- - y))} + |u_b| \cdot \chi_{(A^+ \Delta (A^+ - y))}.$$

Für $\varepsilon = \|y\|_2$ erhalten wir die Inklusionen

$$\begin{aligned}A^- \setminus (A^- - y) &\subset ((A^- + U_\varepsilon(0)) \setminus A^-) - y, \\ (A^- - y) \setminus A^- &\subset ((A^- + U_\varepsilon(0)) \setminus A^-), \\ A^+ \setminus (A^+ - y) &\subset ((A^+ + U_\varepsilon(0)) \setminus A^+) - y, \\ (A^+ - y) \setminus A^+ &\subset ((A^+ + U_\varepsilon(0)) \setminus A^+)\end{aligned}$$

und aus diesen

$$\begin{aligned}\mu(A^- \Delta (A^- - y)) &\leq 2 \cdot m_a(\|y\|_2) \|y\|_2 \\ \mu(A^+ \Delta (A^+ - y)) &\leq 2 \cdot m_b(\|y\|_2) \|y\|_2.\end{aligned}$$

Damit können wir die Norm der Translation abschätzen und es gilt

$$\|u_0 - \tau_y u_0\|_2^2 \leq 2 \left(m_b(\|y\|_2) \|y\|_2 u_b^2 + m_a(\|y\|_2) \|y\|_2 u_a^2 \right) \leq C \|y\|_2.$$

Wegen $p \in H \subset C_0(\Omega)$ wissen wir, dass $\{|p| \geq \beta\}$ eine kompakte Menge in \mathbb{R}^n ist. Insbesondere hat sie damit einen positiven Abstand d von $\partial\Omega$, hierfür wird $\beta > 0$ benötigt. Aus den Komplementaritätsbedingungen folgt, dass $A^+ \cup A^- \subset \{|p| \geq \beta\}$ und somit ist u_0 auf einem Streifen entlang des Randes von Ω identisch 0. Damit ergibt sich, dass, wenn wir u_0 mit einem Glättungskern δ , dessen Träger in $U_d(0)$ enthalten ist, falten, das Produkt der Faltung auf dem Rand von Ω und außerhalb verschwindet. Aus der vorigen Abschätzung und der Beziehung (2.14) erhalten wir

$$\|u_0 \star \delta - u_0\|_2^2 \leq \int \delta(y) C \|y\|_2 \, dy.$$

Benutzen wir nun einen Faltungskern δ , dessen Träger in $U_1(0)$ liegt, und falten u_0 mit $\delta_\varepsilon := \varepsilon^{-n} \delta(\frac{\cdot}{\varepsilon})$, so erhalten wir

$$\|u_0 \star \delta_\varepsilon - u_0\|_2^2 \leq \int \delta_\varepsilon(y) C \|y\|_2 \, dy \leq C \omega_n \cdot \int_0^\varepsilon \delta_\varepsilon(r) r \cdot r^{n-1} \, dr,$$

wobei ω_n die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel ist. Wegen

$$\int \delta_\varepsilon \, dy = \omega_n \cdot \int_0^\varepsilon \delta_\varepsilon(r) \cdot r^{n-1} \, dr = 1$$

können wir wegen $r \leq \varepsilon$

$$\|u_0 \star \delta_\varepsilon - u_0\|_2^2 \leq C \omega_n \cdot \int_0^\varepsilon \delta_\varepsilon(r) r \cdot r^{n-1} \, dr \leq C \varepsilon \omega_n \cdot \int_0^\varepsilon \delta_\varepsilon(r) \cdot r^{n-1} \, dr \leq C \varepsilon$$

zeigen. Weiter gilt nun für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\partial_\alpha \delta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \underbrace{\varepsilon^{-|\alpha|}}_{\text{innere Ableitung}} (\partial_\alpha \delta) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$$

und für die Norm der Ableitung

$$\|\partial_\alpha \delta_\varepsilon\|_1 = \varepsilon^{-|\alpha|} \|\partial_\alpha \delta\|_1 \leq \varepsilon^{-|\alpha|} C.$$

Für $z = u_0 \star \delta_\varepsilon$ gilt nun (siehe [Alt99, S. 98])

$$\|\partial_\alpha z\|_2 = \|u_0 \star (\partial_\alpha z)\|_2 \leq \|\partial_\alpha z\|_1 \|u_0\|_2.$$

Somit erhalten wir für die H -Norm von z

$$\|z\|_H^2 = \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\partial_\alpha z\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 C^2 \cdot \varepsilon^{-4}.$$

Aus (2.12) erhalten wir

$$\|i(u_0 - u_\alpha)\|_{H^*} \leq \|A^*\| \cdot \|\mathcal{S}(u_0 - u_\alpha)\|_2 \leq C \sqrt{\alpha} \|u_0 - u_\alpha\|_2.$$

Mit obigen Ungleichungen erhalten wir aus (2.13) schließlich

$$\langle u_0, u_0 - u_\alpha \rangle \leq C(\alpha^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{-2} \|u_0 - u_\alpha\|_2^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u_0 - u_\alpha\|_2) \leq C(\alpha^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}) \|u_0 - u_\alpha\|_2^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Mit $\varepsilon = \alpha^{\frac{1}{5}}$ ergibt sich

$$\langle u_0, u_0 - u_\alpha \rangle \leq C \alpha^{\frac{1}{10}} \|u_0 - u_\alpha\|_2^{\frac{1}{2}}.$$

Wenden wir wieder (2.12) an, so haben wir schließlich

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2^2 \leq \langle u_0, u_0 - u_\alpha \rangle \leq C \alpha^{\frac{1}{10}} \|u_0 - u_\alpha\|_2^{\frac{1}{2}}$$

und somit

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2 \leq C \alpha^{\frac{1}{15}}. \quad \blacksquare$$

Wenn wir in (2.15) die gezeigte Konvergenzordnung von $1/15$ einsetzen, erhalten wir eine bessere Konvergenzordnung. Dies können wir nun wiederholen (dies wird im Beweis des folgenden Satzes ausführlich erläutert) und erhalten

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2 \leq C_d \alpha^d$$

für $d < 1/11$ und einer von d abhängigen Konstanten C_d .

Eine weitere Möglichkeit, eine Konvergenzrate für die Steuerungen zu erhalten, ist, die Konvergenzrate für die adjungierten Zustände sowie die Komplementaritätsbedingung auszunutzen. Dabei sind die Stellen problematisch, an denen $|p_0|$ in einer Umgebung von β liegt, da auf der Menge $\{|p_0| = \beta\}$ die Lösung u_0 nicht durch den adjungierten Zustand festgelegt wird und man somit auf dieser Menge $u_0 - u_\alpha$ nicht abschätzen kann.

2.22 Satz. Sei $\beta \geq 0$, $u_a, u_b \in L^\infty(\Omega)$ und weiterhin gelte für $\varepsilon \geq 0$

$$\mu(\{|p_0| - \beta| \leq \varepsilon\}) \leq C_1 \cdot \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $d < 1/3$

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2 \leq C_d \alpha^d.$$

Beweis. In diesem Beweis werden mit C verschiedene Konstanten bezeichnet.

Angenommen es gilt

$$\|p_0 - p_\alpha\|_\infty \leq C \alpha^d. \quad (2.16)$$

Wir betrachten $\|u_0 - u_\alpha\|_2^2 = \int_\Omega (u_0 - u_\alpha)^2 dx$ und teilen Ω in 15 disjunkte Mengen, je nach Größe von p_0 und p_α , auf. Da $\mu(\{|p_0| = \beta\}) = 0$ gilt, müssen wir diese Mengen nicht betrachten. Es zeigt sich, dass auf manchen Mengen $u_0 = u_\alpha$ gilt, während wir von den anderen das Maß beschränken können.

	$p_0 < -\beta$	$ p_0 < \beta$	$p_0 > \beta$
$p_\alpha \leq -\beta + \alpha \cdot u_a$	$u_0 = u_\alpha = u_a$	(1)	(2)
$p_\alpha \in (-\beta + \alpha \cdot u_a, -\beta]$	(3)	(1)	(2)
$ p_\alpha < \beta$	(1)	$u_0 = u_\alpha = 0$	(1)
$p_\alpha \in [\beta, \beta + \alpha \cdot u_b)$	(2)	(1)	(4)
$p_\alpha \geq \beta + \alpha \cdot u_b$	(2)	(1)	$u_0 = u_\alpha = u_b$

In den mit (1) gekennzeichneten Mengen gilt wegen (2.16)

$$\||p_0| - \beta| \leq C \alpha^d$$

und somit gilt für das Maß M dieser Mengen

$$M \leq \mu\left(\{|p_0| - \beta| \leq C \alpha^d\}\right) \leq C_1 \cdot C \alpha^d.$$

Für die Mengen (2) gilt im Falle $\beta = 0$ dieselbe Argumentation wie für die (1). Ist hingegen $\beta > 0$, dann haben, wegen $|p_0 - p_\alpha| \geq 2\beta$, die mit (2) gekennzeichneten Mengen für kleines α das Maß 0.

Für die Menge (3) gilt

$$|p_0 + \beta| \leq \alpha \cdot u_a + C\alpha^d,$$

und wegen $u_a \in L^\infty$ folgt

$$|p_0 + \beta| \leq C\alpha^d$$

für kleine α . Somit haben wir auch bei dieser Menge für das Maß M

$$M \leq \mu\left(\{|p_0| - \beta| \leq C\alpha^{\frac{1}{2}}\}\right) \leq C_1 \cdot C\alpha^d.$$

Die Menge (4) wird analog behandelt.

Mit diesen Abschätzungen der Maße und mit $u_a, u_b \in L^\infty(\Omega)$ gilt nun

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2^2 \leq C\alpha^d.$$

Aus (2.12) folgt nun

$$\|p_0 - p_\alpha\|_\infty \leq C\alpha^{\frac{d+2}{4}}.$$

Wir haben also

$$\|p_0 - p_\alpha\|_\infty \leq C\alpha^d \Rightarrow \|p_0 - p_\alpha\|_\infty \leq C\alpha^{\frac{d+2}{4}} \text{ und } \|u_0 - u_\alpha\|_2 \leq C\alpha^{\frac{d}{2}}.$$

Aus Satz 2.19 folgt

$$\|p_0 - p_\alpha\|_\infty \leq C\alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Nun betrachten wir die Folge

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 2}{4}$$

mit $a_0 = \frac{1}{2}$. Diese Folge ist monoton wachsend und hat den Grenzwert $2/3$. Damit gilt für alle $d < 2/3$

$$\|p_0 - p_\alpha\|_\infty \leq C_d \alpha^d$$

und somit für alle $d < 1/3$

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2 \leq \hat{C}_d \alpha^d. \quad \blacksquare$$

Die Voraussetzung

$$\mu(\{|p_0| - \beta| \leq \varepsilon\}) \leq C_1 \cdot \varepsilon.$$

ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn $\mu(\{|p_0| = \beta\}) = 0$, p_0 stetig differenzierbar und $\nabla p_0 \neq 0$ auf $\{|p_0| = \beta\}$ gilt.

2.23 Satz. *Man erhält*

$$\|u_\alpha - \frac{1}{2}u_0\|_2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_2,$$

und

$$\|u_0 - u_\alpha\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 - \|u_\alpha\|_2^2.$$

Beweis. Aus (2.12) folgt

$$\begin{aligned} \|u_\alpha - u_0\|_2^2 &\leq \langle u_0, u_0 - u_\alpha \rangle \\ \|u_\alpha\|_2^2 - 2\langle u_\alpha, u_0 \rangle + \|u_0\|_2^2 &\leq \|u_0\|_2^2 - \langle u_\alpha, u_0 \rangle \\ \|u_\alpha - \frac{1}{2}u_0\|_2^2 - \frac{1}{4}\|u_0\|_2^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich die erste Ungleichung. Aus

$$\|u_\alpha\|_2^2 - 2\langle u_\alpha, u_0 \rangle + \|u_0\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 - \langle u_\alpha, u_0 \rangle$$

folgt nun aber auch

$$\begin{aligned} \|u_\alpha\|_2^2 - \langle u_\alpha, u_0 \rangle &\leq 0 \\ 2\|u_\alpha\|_2^2 - 2\langle u_\alpha, u_0 \rangle &\leq 0 \\ \|u_0\|_2^2 - 2\langle u_\alpha, u_0 \rangle + \|u_\alpha\|_2^2 &\leq \|u_0\|_2^2 - \|u_\alpha\|_2^2 \\ \|u_0 - u_\alpha\|_2^2 &\leq \|u_0\|_2^2 - \|u_\alpha\|_2^2. \end{aligned}$$

■

Bevor wir nun noch einen Satz zu der Differenzierbarkeit von u_α angeben, benötigen wir noch drei Konvergenzaussagen für L^2 -Funktionen.

2.24 Lemma. Sei $f(h) \in L^2(\Omega)$ für $h \in U_\delta(0)$ mit $\delta > 0$. Weiterhin gelte $f(h) \rightarrow \bar{f}$ in $L^2(\Omega)$ für $h \searrow 0$, das heißt,

$$\lim_{h \searrow 0} \|f(h) - \bar{f}\|_2 \rightarrow 0.$$

Weiterhin gelte für $g \in L^2(\Omega)$, dass $g(x) > 0$ für fast alle $x \in \Omega$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \max\left(-\frac{g}{h}, f(h)\right) &\rightarrow \bar{f} && \text{für } h \searrow 0 \\ \max(0, f(h)) &\rightarrow \max(0, \bar{f}) && \text{für } h \searrow 0 \\ \max\left(0, f(h) - \frac{g}{h}\right) &\rightarrow 0 && \text{für } h \searrow 0 \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen nun zuerst die dritte Aussage. Wir setzen $I(h) := \{f(h) - \frac{g}{h} > 0\}$ und haben

$$\begin{aligned} \left\| \max\left(0, f(h) - \frac{g}{h}\right) - 0 \right\|_2 &= \left[\int_{I(h)} \left(f(h) - \frac{g}{h}\right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_{I(h)} f(h)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_{I(h)} \bar{f}^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{I(h)} (\bar{f} - f(h))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Aus der Konvergenz $f(h) \rightarrow \bar{f}$ folgt nun sofort, dass der zweite Summand gegen 0 geht. Da $\bar{f} \in L^2(\Omega)$ folgt aus der Stetigkeit des Integrals und aus $\mu(I(h)) \rightarrow 0$ sofort, dass auch der erste Summand gegen 0 geht. Wir müssen also nur zeigen, dass $\mu(I(h)) \rightarrow 0$ für $h \searrow 0$.

Sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren $M, \delta > 0$ und $A \subset \Omega$ mit:

- $\mu(\{g < \delta\}) \leq \varepsilon$ (Vergleiche Beweis von Lemma 3.5),
- $\mu(\{\bar{f} > M\}) \leq \varepsilon$ (Satz von Tschebyschow),
- $\mu(A) \leq \varepsilon$ und $f(h) \rightarrow \bar{f}$ gleichmäßig auf $\Omega \setminus A$ (Satz von Jedorow).

Nun existiert ein $h_0 > 0$ sodass für alle $h < h_0$

$$\|(f(h) - \bar{f})|_A\|_\infty \leq M$$

gilt. Nun gilt für alle $h < \min\left(h_0, \frac{\delta}{2M}\right)$ auf der Menge $B = \Omega \setminus A \setminus \{g < \delta\} \setminus \{\bar{f} > M\}$

$$f(h) - \frac{g}{h} \leq 2M - \frac{\delta}{h} \leq 0.$$

Damit gilt $I(h) \subset \Omega \setminus B$ für kleine h und damit $\mu(I(h)) \leq 3\varepsilon$.

Die erste Aussage folgt direkt aus der dritten: Es gilt

$$\max\left(0, -f(h) - \frac{g}{h}\right) + \min\left(0, -f(h) - \frac{g}{h}\right) + \frac{g}{h} = -f(h)$$

und daraus folgt

$$\max\left(0, -f(h) - \frac{g}{h}\right) + f(h) = -\min\left(\frac{g}{h}, -f(h)\right) = \max\left(-\frac{g}{h}, f(h)\right).$$

Wegen $-f(h) \rightarrow -\bar{f}$ konvergiert der erste Summand auf der linken Seite gegen 0 und damit folgt

$$\max\left(-\frac{g}{h}, f(h)\right) \rightarrow \bar{f} \text{ für } h \searrow 0.$$

Um nun noch die zweite Aussage zu beweisen zerlegen wir Ω in Teilmengen

$$\begin{aligned} I_1(h) &= \{f(h) > 0 \text{ und } \bar{f} \geq 0\} \\ I_2(h) &= \{f(h) \leq 0 \text{ und } \bar{f} > 0\} \\ I_3(h) &= \{f(h) > 0 \text{ und } \bar{f} < 0\} \\ I_4(h) &= \{f(h) \leq 0 \text{ und } \bar{f} \leq 0\}. \end{aligned}$$

Nun definieren wir noch $\|w\|_2^I := \|w|_I\|_2$ und es gilt

$$\begin{aligned} \|\max(0, f(h)) - \max(0, \bar{f})\|_2 &\leq \|f(h) - \bar{f}\|_2^{I_1} + \|f(h)\|_2^{I_3} + \|\bar{f}\|_2^{I_2} \\ &\leq \|f(h) - \bar{f}\|_2^{I_1} + \|f(h) - \bar{f}\|_2^{I_3} + \|\bar{f}\|_2^{I_3} + \|\bar{f}\|_2^{I_2}. \end{aligned}$$

Wegen $f(h) \rightarrow \bar{f}$ folgt, dass die ersten beiden Summanden gegen 0 gehen. Um nun zu zeigen, dass auch die letzten beiden Summanden gegen 0 gehen, reicht es zu beweisen, dass $\mu(I_2 \cup I_3) \rightarrow 0$. Wäre nun $\mu(I_i(h)) \geq \varepsilon$ für $i \in \{2, 3\}$ und beliebig kleine h , so würde ein $\delta > 0$ mit

$$\int_{I_i} (f(h) - \bar{f})^2 dx \geq \int_{I_i} \bar{f}^2 dx \geq \delta$$

existieren (Vergleiche Hilfssatz im Beweis von Lemma 3.5). Dies ist aber gerade ein Widerspruch zu der Konvergenz $f(h) \rightarrow \bar{f}$ in $L^2(\Omega)$. Damit gilt $\mu(I_2 \cup I_3) \rightarrow 0$ und somit auch

$$\max(0, f(h)) \rightarrow \max(0, \bar{f}) \quad \text{für } h \searrow 0 \quad \blacksquare$$

2.25 Satz. Für fast alle $\alpha > 0$ gilt, dass die Abbildungen $u_\alpha, y_\alpha, p_\alpha$ im Punkt α differenzierbar sind und es gilt

$$\begin{aligned} \dot{u}_\alpha &= \left(-\frac{1}{\alpha^2} p_\alpha + \frac{1}{\alpha} \dot{p}_\alpha\right) \chi_{I_1 \cup I_2} + \frac{\beta}{\alpha^2} (\chi_{I_1} - \chi_{I_2}) \\ \dot{y}_\alpha &= \mathcal{S} \dot{u}_\alpha \\ \dot{p}_\alpha &= -\mathcal{S}^* \dot{y}_\alpha, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} I_1 &= \{p_\alpha \in (\beta, \beta + \alpha u_b)\} \\ I_2 &= \{p_\alpha \in (-\beta + \alpha u_a, -\beta)\}. \end{aligned}$$

$\dot{u}_\alpha, \dot{y}_\alpha$ und \dot{p}_α existieren als L^2 -Grenzwerte des Differenzenquotienten.

Beweis. Der Beweis folgt im Wesentlichen dem von Gleichung (3.11) in [Sta08].

Zuerst zeigen wir, dass für fast alle $\alpha > 0$ der Differenzenquotient für u_α einen schwachen Grenzwert hat. Sei nun ein $\alpha > 0$ gegeben. Aus Satz 2.18 wissen wir, dass u_α lipschitzstetig ist. Damit gilt für eine Folge $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ mit $\alpha_n \rightarrow \alpha$, dass $\|\frac{u_\alpha - u_{\alpha_n}}{\alpha - \alpha_n}\|_2$ beschränkt ist und somit eine Teilfolge existiert, die schwach gegen ein $\dot{u}_\alpha \in L^2(\Omega)$ konvergiert. Sei $\{v_k, k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von $L^2(\Omega)$. Die Funktionen $\varphi_k : \alpha \mapsto \langle v_k, u_\alpha \rangle$ sind lipschitzstetig und damit nach dem Satz von Rademacher für fast alle $\alpha > 0$ differenzierbar. Damit gilt für fast alle $\alpha > 0$

$$\langle \dot{u}_\alpha, v_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha - \alpha_n} \langle u_\alpha - u_{\alpha_n}, v_k \rangle = \dot{\varphi}_k = \lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} \frac{1}{\alpha - \alpha'} \langle u_\alpha - u_{\alpha'}, v_k \rangle.$$

Sei nun $w \in L^2(\Omega)$ gegeben. Es existiert eine Folge $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset \{v_k, k \in \mathbb{N}\}$ mit $w_k \rightarrow w$. Dann haben wir

$$\left| \langle \dot{u}_\alpha, w \rangle - \left\langle \frac{1}{\alpha - \alpha'} (u_\alpha - u_{\alpha'}), w \right\rangle \right| \leq \underbrace{\|\dot{u}_\alpha\|_2}_{\text{const}} \|w - w_k\|_2 + \left| \left\langle \dot{u}_\alpha - \frac{1}{\alpha - \alpha'} (u_\alpha - u_{\alpha'}), w_k \right\rangle \right| + \underbrace{\left\| \frac{1}{\alpha - \alpha'} (u_\alpha - u_{\alpha'}) \right\|_2}_{\text{beschränkt}} \|w - w_k\|_2.$$

Der erste und der dritte Summand werden für genügend großes k kleiner als $\varepsilon > 0$ und für ein festes k wird nun der zweite Summand für α' nahe an α kleiner als ε . Damit gilt für fast alle $\alpha > 0$

$$\frac{1}{\alpha - \alpha'} (u_\alpha - u_{\alpha'}) \rightarrow \dot{u}_\alpha \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad \text{für } \alpha' \rightarrow \alpha.$$

Daraus folgt nun

$$\frac{1}{\alpha - \alpha'}(p_\alpha - p_{\alpha'}) \rightarrow \dot{p}_\alpha \text{ in } L^2(\Omega) \text{ f\u00fcr } \alpha' \rightarrow \alpha.$$

Wir verwenden nun f\u00fcr u die Darstellung (vergleiche auch Gleichung (2.9b) mit $c = \alpha^{-1}$)

$$u = \alpha^{-1} (\max(0, p - \beta) + \min(0, p + \beta) + \\ - \max(0, p - \beta - \alpha u_b) - \min(0, p + \beta - \alpha u_a)).$$

Die rechte Seite dieser Darstellung leiten wir nun in Richtung 1 und in Richtung -1 ab und erhalten, dass die Differenzenquotienten stark in $L^2(\Omega)$ konvergieren. Dies gilt damit auch f\u00fcr den Differenzenquotienten von u_α . Diese aufwendigere Rechnung wollen wir exemplarisch f\u00fcr die Richtungsableitung in Richtung 1 f\u00fcr den ersten Summanden vorf\u00fchren.

Wir definieren $g(\alpha') = \frac{p_{\alpha'} - \beta}{\alpha'}$ und $f(h) = \frac{1}{h}(g(\alpha + h) - g(\alpha))$. Dann gilt

$$\lim_{h \searrow 0} f(h) = \dot{g}(\alpha) = \frac{\dot{p}_\alpha}{\alpha} + \frac{\beta - p_\alpha}{\alpha^2}.$$

Nun betrachten wir den Differenzenquotienten von $\max(0, g(\alpha))$, also $\frac{1}{h}(\max(0, g(\alpha + h)) - \max(0, g(\alpha)))$.

Auf der Menge $\{x \in \Omega : g(\alpha) > 0\}$ gilt

$$\frac{1}{h}(\max(0, g(\alpha + h)) - \max(0, g(\alpha))) = \frac{1}{h} [\max(0, g(\alpha + h)) - g(\alpha)] \\ = \max\left(-\frac{g(\alpha)}{h}, f(h)\right) \rightarrow \dot{g}(\alpha) \text{ f\u00fcr } h \searrow 0,$$

vergleiche auch mit der ersten Formel des letzten Lemmas.

Auf der Menge $\{x \in \Omega : g(\alpha) = 0\}$ gilt

$$\frac{1}{h}(\max(0, g(\alpha + h)) - \max(0, g(\alpha))) = \frac{1}{h} [\max(0, g(\alpha + h))] \\ = \max(0, f(h)) \rightarrow \max(0, \dot{g}(\alpha)) \text{ f\u00fcr } h \searrow 0,$$

vergleiche auch mit der zweiten Formel des letzten Lemmas.

Auf der Menge $\{x \in \Omega : g(\alpha) < 0\}$ gilt

$$\frac{1}{h}(\max(0, g(\alpha + h)) - \max(0, g(\alpha))) = \frac{1}{h} [\max(0, g(\alpha + h))] \\ = \max\left(0, f(h) + \frac{g(\alpha)}{h}\right) \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } h \searrow 0,$$

vergleiche auch mit der letzten Formel des letzten Lemmas.

Somit erhalten wir die Richtungsableitung von $\max(0, g(\alpha))$ in Richtung 1 als

$$\dot{g}(\alpha)\chi_I,$$

wobei $I = \{g(\alpha) \geq 0 \text{ oder } g(\alpha) = 0, \dot{g}(\alpha) \geq 0\}$.

Für die anderen drei Summanden kann ebenso verfahren werden und wir erhalten für \dot{u}_α

$$\dot{u}_\alpha = \left(-\frac{1}{\alpha^2} p_\alpha + \frac{1}{\alpha} \dot{p}_\alpha \right) \chi_{I_1 \cup I_2} + \frac{\beta}{\alpha^2} (\chi_{I_1} - \chi_{I_2})$$

wobei

$$I_1 = \{p_\alpha \in (\beta, \beta + \alpha u_b) \text{ oder } p_\alpha = \beta, \dot{p}_\alpha \geq 0 \text{ oder } p_\alpha = \beta + \alpha u_b, \dot{p}_\alpha \leq u_b\}$$

$$I_2 = \{p_\alpha \in (-\beta + \alpha u_a, -\beta) \text{ oder } p_\alpha = -\beta, \dot{p}_\alpha \leq 0 \text{ oder } p_\alpha = -\beta + \alpha u_a, \dot{p}_\alpha \geq u_a\}.$$

Die Berechnung für die Richtungsableitung in Richtung -1 ist analog und wir erhalten

$$\dot{u}_\alpha = \left(-\frac{1}{\alpha^2} p_\alpha + \frac{1}{\alpha} \dot{p}_\alpha \right) \chi_{I_3 \cup I_4} + \frac{\beta}{\alpha^2} (\chi_{I_3} - \chi_{I_4})$$

wobei

$$I_3 = \{p_\alpha \in (\beta, \beta + \alpha u_b) \text{ oder } p_\alpha = \beta, \dot{p}_\alpha \leq 0 \text{ oder } p_\alpha = \beta + \alpha u_b, \dot{p}_\alpha \geq u_b\}$$

$$I_4 = \{p_\alpha \in (-\beta + \alpha u_a, -\beta) \text{ oder } p_\alpha = -\beta, \dot{p}_\alpha \geq 0 \text{ oder } p_\alpha = -\beta + \alpha u_a, \dot{p}_\alpha \leq u_a\}.$$

Weiterhin erhalten wir aus diesen beiden Rechnungen, dass der Differenzenquotient von u_α sogar stark konvergiert, da dies für die rechte Seite in der Darstellung für u_α gilt.

Vergleichen wir nun diese beiden Darstellungen von \dot{u}_α auf den Mengen $\{p_\alpha = \beta\}$, $\{p_\alpha = \beta + \alpha u_b\}$, $\{p_\alpha = -\beta\}$ und $\{p_\alpha = -\beta + \alpha u_a\}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} p_\alpha = \beta &\quad \Rightarrow \dot{p}_\alpha = 0 \\ p_\alpha = \beta + \alpha u_b &\Rightarrow \dot{p}_\alpha = u_b \\ p_\alpha = -\beta &\quad \Rightarrow \dot{p}_\alpha = 0 \\ p_\alpha = -\beta + \alpha u_a &\Rightarrow \dot{p}_\alpha = u_a. \end{aligned}$$

Damit ist auf diesen Mengen die Ableitung gerade 0 und somit erhalten wir

$$\dot{u}_\alpha = \left(-\frac{1}{\alpha^2} p_\alpha + \frac{1}{\alpha} \dot{p}_\alpha \right) \chi_{I_1 \cup I_2} + \frac{\beta}{\alpha^2} (\chi_{I_1} - \chi_{I_2})$$

wobei

$$I_1 = \{p_\alpha \in (\beta, \beta + \alpha u_b)\}$$

$$I_2 = \{p_\alpha \in (-\beta + \alpha u_a, -\beta)\},$$

und somit hängen die Mengen I_1 und I_2 nicht mehr von \dot{p}_α ab. Wir erhalten zusammen mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{y}_\alpha &= \mathcal{S} \dot{u}_\alpha \\ \dot{p}_\alpha &= -\mathcal{S}^* \dot{y}_\alpha \end{aligned}$$

ein lineares Gleichungssystem, mit dem wir \dot{u}_α berechnen können. ■

2.7 Numerische Untersuchungen

In dem letzten Abschnitt des Kapitels soll diskutiert werden, wie man eine Lösung u_α für kleine α berechnen kann und es soll untersucht werden, inwieweit man die berechnete Konvergenzordnung im Falle der Diskretisierung beobachten kann.

Wir wissen, dass wir für die Nullstellensuche der Funktion (vergleiche auch Gleichung (2.9b) mit $c = \alpha^{-1}$)

$$F(u) = u + \alpha^{-1} (-\max(0, p - \beta) - \min(0, p + \beta) + \max(0, p - \beta - \alpha u_b) + \min(0, p + \beta - \alpha u_a)), \quad (2.17)$$

wobei mit $p = \mathcal{S}^*(y_d - \mathcal{S}u)$ der adjungierte Zustand bezeichnet wird, ein semiglattes Newtonverfahren verwenden können. Wir bezeichnen mit $F'(u)$ die verallgemeinerte Ableitung der Funktion F an der Stelle u . In [Sta08] wurde $\|F'(u)^{-1}\| \leq 1$ gezeigt. In [CNQ00, S. 1211] wurde eine Formel für den Konvergenzradius hergeleitet: Gelte

$$\|F(u) - F(\bar{u}) - F'(u)(u - \bar{u})\|_2 \leq \frac{q}{M} \|u - \bar{u}\|_2,$$

mit $q < 1$ und $M \geq \|F'(u)^{-1}\|$, auf einer offenen Menge U , dann konvergiert das semiglatte Newtonverfahren mit einem Startwert aus U gegen die Lösung \bar{u} . Wenn man nun die linke Seite auswertet, dies wird hier exemplarisch an dem ersten max-Term von F vorgerechnet, kommt man auf Terme der Art

$$\alpha^{-1} \left(\int_A (p - \beta)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei $A = \{\beta - \mathcal{S}^* \mathcal{S}h > p > \beta\}$ und $h = \bar{u} - u$. Schätzt man nun $p - \beta$ auf dieser Menge nach oben mit $\mathcal{S}^* \mathcal{S}h$ ab, erhält man

$$\leq \alpha^{-1} \left(\int_A (\mathcal{S}^* \mathcal{S}h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

und mit $\|\mathcal{S}^* \mathcal{S}h\|_\infty \leq \|\mathcal{S}^* \mathcal{S}\| \|h\|_2$

$$\leq \alpha^{-1} \|\mathcal{S}^* \mathcal{S}\| \cdot \|h\|_2 \cdot \mu(A)^{\frac{1}{2}}.$$

Es wird nun benötigt, diesen Term von oben mit $q \|h\|_2$ abzuschätzen. Wir müssen also eine Schranke für $\|h\|_2$ angeben, für die

$$\mu(A) \leq C$$

gilt. Dies hängt aber von dem Verhalten von p für Werte in der Nähe von β ab und lässt sich nicht konkret abschätzen, da p als adjungierter Zustand von u noch unbekannt ist. Wir können lediglich angeben, dass $\mu(A) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. An obiger Rechnung erkennen wir aber, dass der Konvergenzradius von α abhängt. Je kleiner α ist, umso kleiner muss auch $\mu(A)$ sein und damit verkleinert sich auch der Konvergenzradius.

In numerischen Berechnungen hat sich gezeigt, dass für relativ große α der Konvergenzbereich so groß ist, dass 0 im Konvergenzbereich liegt und so das Newtonverfahren mit Startwert 0 konvergiert. Aus der stetigen Abhängigkeit der Lösung von α wissen wir nun, dass die berechnete Lösung in der Nähe der Lösungen für kleinere α liegt und so auch im Konvergenzbereich für diese kleineren α . Damit ergibt sich als Vorgehen

Algorithmus 1:

1. Wähle $\alpha > 0$
2. Vergrößere α solange, bis Newtonverfahren mit Startpunkt 0 für α konvergiert
3. Wähle α' mit $0 < \alpha' < \alpha$
4. Vergrößere α' solange, bis Newtonverfahren mit Startpunkt $u(\alpha', \alpha, u_\alpha)$ für α' konvergiert
5. Setze $\alpha \leftarrow \alpha'$
6. Ist α klein genug, dann FERTIG, sonst weiter bei 3.

Hierbei ist $u(\alpha', \alpha, u_\alpha)$ eine Schätzung für den Wert $u_{\alpha'}$, wenn wir für α schon die Lösung u_α kennen. Eine einfache Schätzung wäre zum Beispiel $u(\alpha', \alpha, u_\alpha) = u_\alpha$. In [GGW08] wird eine Aufgabe des Typs

$$u = \text{proj}_{[u_a, u_b]}(g(\alpha) - G(\alpha)u)$$

behandelt. Hierbei ist die Lösung u der Projektionsgleichung gesucht und es ist $g(\alpha) \in L^\infty$, $G(\alpha) \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$. Setzen wir $g(\alpha) = \alpha^{-1}\mathcal{S}^*y_d$ und $G(\alpha) = \alpha^{-1}\mathcal{S}^*\mathcal{S}$ so erhalten wir die Komplementaritätsbedingung für $\beta = 0$

$$u = \text{proj}_{[u_a, u_b]}(\mathcal{S}^*(y_d - \mathcal{S}u)).$$

Für $\beta \neq 0$ erhalten wir eine etwas andere nichtlineare Gleichung, da u auf den Teilen von Ω verschwindet, auf denen $|p| \leq \beta$ gilt. Obwohl somit von [GGW08] der Fall $\beta \neq 0$ nicht abgedeckt wird, wollen wir trotzdem die Ergebnisse auf unsere Problemstellung anwenden und numerisch untersuchen. Es werden in der Arbeit drei Schätzungen angegeben.

$$u_1 = u_\alpha + \dot{u}(\alpha' - \alpha) \tag{2.18a}$$

$$u_2 = \text{proj}_{[u_a, u_b]}(u_\alpha + \dot{u}(\alpha' - \alpha)) \tag{2.18b}$$

$$u_3 = \text{proj}_{[u_a, u_b]}(\alpha^{-1}p_\alpha - \alpha^{-2}(\alpha' - \alpha)p_\alpha + \alpha^{-1}\dot{p}(\alpha' - \alpha)), \tag{2.18c}$$

wobei hier $\dot{u}(\alpha' - \alpha)$ und $\dot{p}(\alpha' - \alpha)$ die Richtungsableitungen in Richtung $\alpha' - \alpha$ sind. Für unseren Fall können wir, wie oben erwähnt, in (2.18c) nicht $\text{proj}_{[u_a, u_b]}$ verwenden, sondern nutzen stattdessen, mit $\phi = \alpha^{-1}p_\alpha - \alpha^{-2}(\alpha' - \alpha)p_\alpha + \alpha^{-1}\dot{p}(\alpha' - \alpha)$,

$$u_3 = \min(\max(0, \phi - \alpha'^{-1}\beta), u_b) + \max(\min(0, \phi + \alpha'^{-1}\beta), u_a).$$

Diese Formulierung ergibt sich gerade aus der Komplementaritätsbedingung (2.11). Es wurde gezeigt, dass die dritte Strategie (2.18c) Abschätzungen in L^∞ erlaubt, während dies für die anderen nicht möglich ist. Es soll nun numerisch untersucht werden, wie sich dies für unsere Aufgabe verhält und welchen Einfluss dies auf das Newtonverfahren hat.

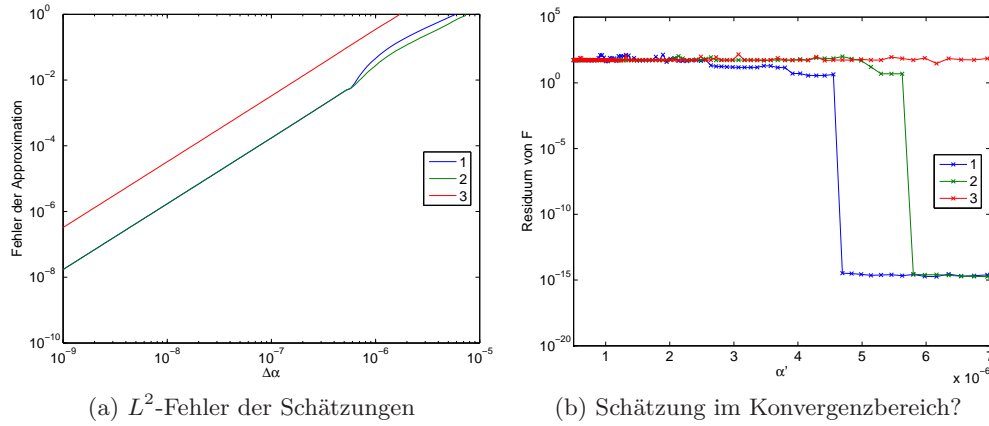


Abbildung 2.3: Schätzungen für $u_{\alpha'}$

Für Abbildung 2.3 wurden folgende Parameter verwendet:

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 1]^2 \\ y_d &= \frac{1}{6} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{2x} \\ u_a &= -30 \\ u_b &= 30 \\ \beta &= 10^{-3} \\ h_{max} &= 0.1 \text{ (maximale Kantenlänge im FEM-Netz)}\end{aligned}$$

Zuerst wurde die Lösung u_α für $\alpha = 10^{-5}$ berechnet. Anschließend wurde für kleinere α' die Lösung $u_{\alpha'}$ sowie die Schätzungen berechnet. Weiterhin wurde ein semiglattes Newtonverfahren mit der Schätzung als Startwert durchgeführt. In dem linken Diagramm wurde die Abweichung der Schätzung von der Lösung in der L^2 -Norm und in dem rechten das Residuum $\|F(u_N)\|_2$ des Ergebnisses u_N des Newtonverfahrens dargestellt.

Man sieht, dass bezüglich der L^2 -Norm die 3. Schätzung um einen konstanten Faktor schlechter ist. Allerdings zeigt sich, dass für $\alpha = 10^{-5}$ und bei einem Wert von circa $9 \cdot 10^{-6}$ für α' die Schätzung u_3 nicht mehr im Konvergenzbereich des semiglatten Newtonverfahrens ist. Die besten Ergebnisse bezüglich der Konvergenz des Newtonverfahrens liefert die Schätzung u_1 .

Für feinere Diskretisierungen ergeben sich ähnliche Diagramme, siehe Abbildung 2.4. Obwohl die 3. Schätzung schlechtere L^2 -Normen liefert, widerspricht dies aber nicht den Ergebnissen aus [GGW08], da dort nur gezeigt wird, dass für diese Schätzung auch die L^∞ -Normen $o(\Delta\alpha)$ sind.

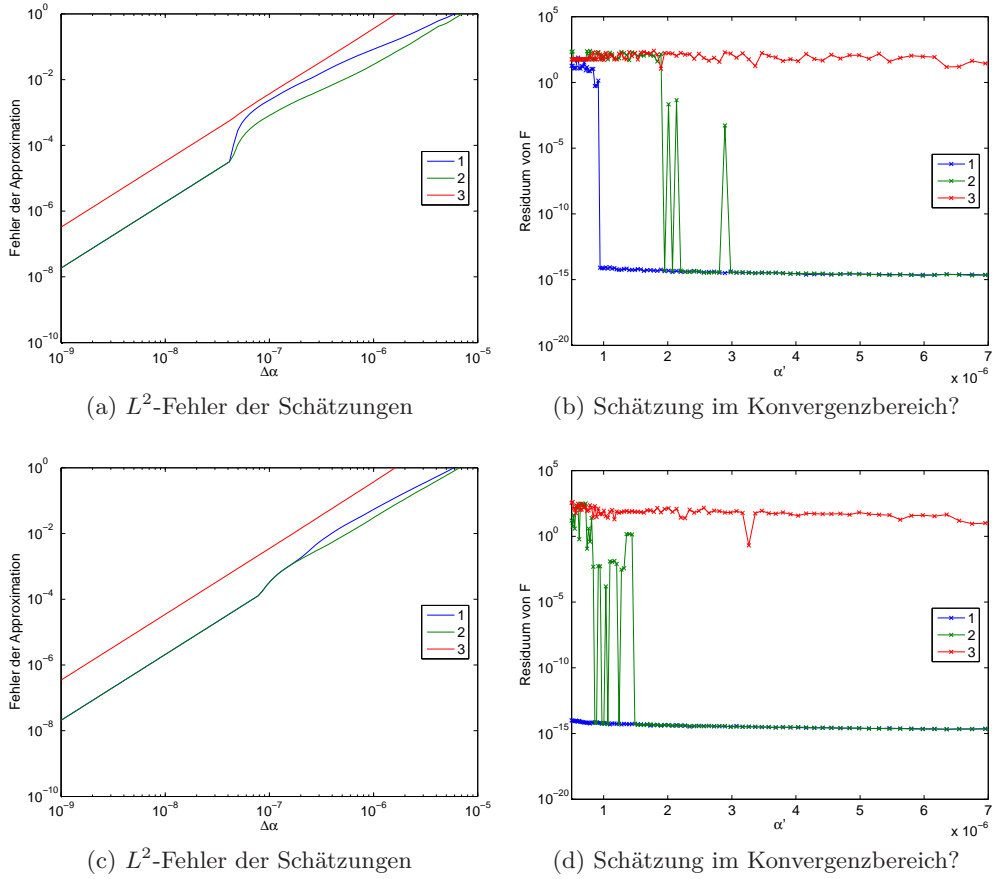


Abbildung 2.4: Schätzungen für $u_{\alpha'}$, $h = 0.05$ (oben), $h = 0.025$ (unten)

Auch für andere Parametersätze ergibt sich, dass die Schätzungen 1 und 2 für kleinere α' als Schätzung 3 konvergieren. Daher werden wir in Algorithmus 1 die Schätzung 1 verwenden.

Damit ist es nun möglich Lösungen u_{α} für sehr kleine Werte α zu berechnen. Dies wollen wir nun nutzen, um an einem konkreten Beispiel die experimentelle Konvergenzordnung zu messen. Dazu konstruieren wir uns zuerst eine Aufgabe, deren (diskretisierte) Lösung u_0 wir kennen. Wir setzen die Parameter

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 1]^2 \\ u_a &= -30 \\ u_b &= 30 \\ \beta &= 10^{-3}\end{aligned}$$

und wählen $y_p = -\Delta \bar{p}$

$$y_p = 10^{-1} \sin(3\pi x) \sin(2\pi y) e^{2x} e^y$$

und erhalten den optimalen Zustand als Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{p} &= y_p \text{ auf } \Omega \\ \bar{p} &= 0 \text{ auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass man, um y_d zu berechnen, nicht die numerisch instabile Ableitung $-\Delta \bar{p}$ auswerten muss. Nun können wir gemäß Abbildung 2.1

$$\bar{u} = u_a \chi_{\{\bar{p} \leq -\beta\}} + u_b \chi_{\{\bar{p} \geq \beta\}}$$

setzen. Der gewünschten Zustand y_d berechnet sich nun zu

$$y_d = -\Delta \bar{p} + \bar{y} = y_p + \bar{y}, \quad (2.19)$$

wobei \bar{y} der optimale Zustand ist. Dieser ist Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{y} &= \bar{u} \text{ auf } \Omega \\ \bar{y} &= 0 \text{ auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Diese partiellen Differentialgleichungen werden wir mittels der FEM diskretisieren und dann lösen, damit \bar{u} die Lösung der diskretisierten Aufgabe ist. Damit können wir den Approximationsfehler im diskretisierten System $\bar{u}^{(h)} - \bar{u}_\alpha^{(h)}$ beobachten.

Diese Aufgabe wurde nun für fünf Gittergrößen gerechnet. Der Wert für α wurde jeweils soweit verkleinert, bis u_α mit u_0 übereinstimmte. Dieser Effekt, dass $u_\alpha = u_0$ für kleines α , ist sowohl eine Auswirkung der Diskretisierung als auch der Wahl von y_d . Wir wissen, dass p_α in der H - und somit auch in der L^∞ -Norm gegen p_0 konvergiert. Damit werden wir für ein kleines α erhalten, dass $p_\alpha(x_j) \notin (-\beta + \alpha u_a, -\beta) \cup (\beta, \beta + \alpha u_b)$ für alle Punkte x_j des Gitters gilt, da $|\bar{p}(x_j)| = \beta$ sicherlich für kein x_j gilt. Vergleichen wir dies nun mit dem Optimalitätssystem für (u_0, p_0) , welches in Abbildung 2.2 dargestellt ist, so sehen wir, dass in diesem Falle die aktiven Mengen korrekt aufgelöst wurden sind und $u_\alpha(x_j) \in \{u_a(x_j), 0, u_b(x_j)\}$ gilt.

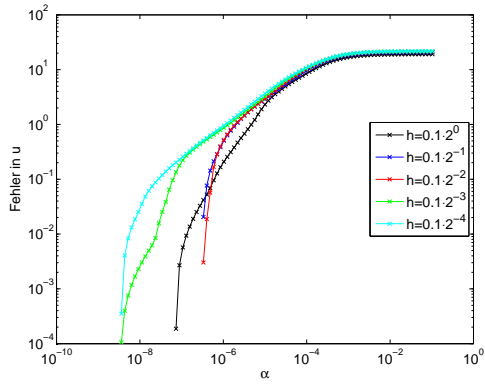
Die Ergebnisse sind in Abbildung 2.5 dargestellt. Aufgrund der logarithmischen Skalierung konnte jeweils nur das vorletzte berechnete α dargestellt werden, da für das letzte $u_\alpha = u_0$ gilt und der Fehler somit 0 ist. Weiterhin sind in Abbildung 2.5 die experimentellen Konvergenzraten von u_α und p_α dargestellt. Dazu wurde für den Fehler $e(\alpha) = \|u_0 - u_\alpha\|_2$ angenommen, dass

$$e(\alpha) = C \cdot \alpha^d \quad (2.20)$$

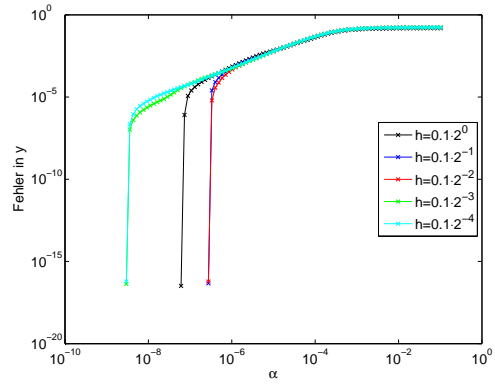
gilt. Wenn wir nun für α_1 und α_2 den Wert e kennen, können wir d als

$$d = \frac{\log \frac{e(\alpha_1)}{e(\alpha_2)}}{\log \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

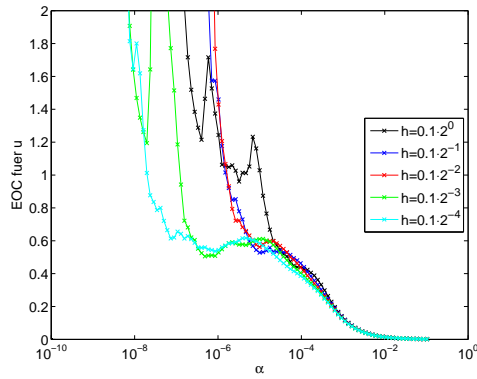
berechnen. Da allerdings in Gleichung (2.20) das Gleichheitszeichen nur eine Annahme ist, kann die experimentelle Konvergenzordnung nicht mehr als ein Hinweis auf die



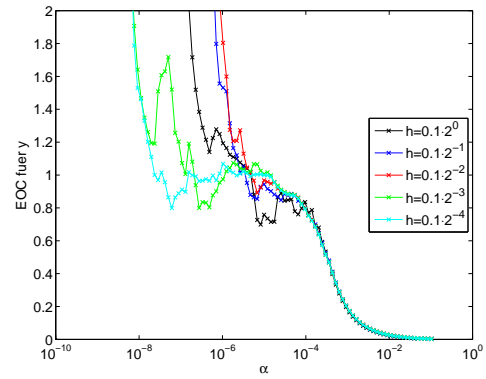
(a) $\|u_0 - u_\alpha\|_2$



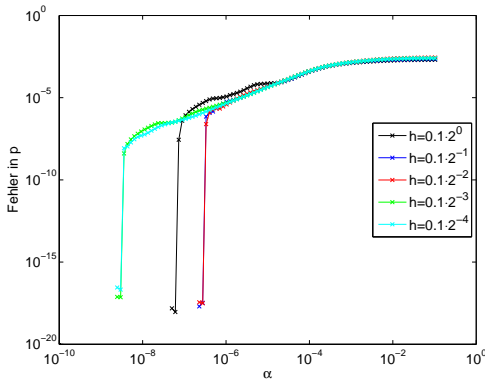
(b) $\|y_0 - y_\alpha\|_2$



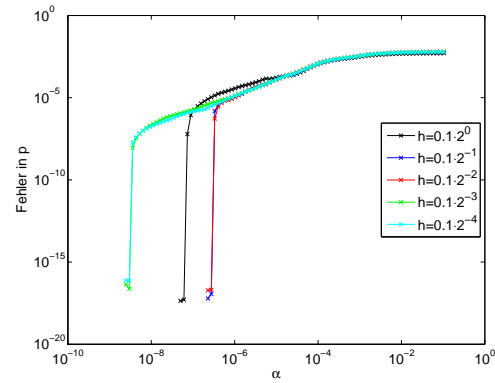
(c) Experimentelle Konvergenzrate für u_α



(d) Experimentelle Konvergenzrate für y_α



(e) $\|p_0 - p_\alpha\|_2$



(f) $\|p_0 - p_\alpha\|_\infty$

Abbildung 2.5: Konvergenz von u_α , y_α , p_α

richtige Konvergenzordnung sein. Die Abbildungen 2.5 (c) und (d) kann man nun so interpretieren, dass für große α $u_\alpha \approx \frac{1}{\alpha} \mathcal{S}^* y_d$ gilt (Vergleiche hierzu auch Lemma 3.5). In diesem Bereich kann man noch keine Konvergenz beobachten. Die Konvergenz stellt sich erst bei $\alpha \approx 10^{-5}$ ein. Für grobe Netze werden bei dieser Größe von α allerdings die aktiven Mengen schon sehr gut aufgelöst und die Konvergenzordnung damit künstlich erhöht. Bei den zwei feinen Netzen erhalten wir im Bereich $\alpha \approx 10^{-5} \dots 10^{-7}$ für u eine Konvergenzordnung von ungefähr 0.5 und für y ungefähr 1. Damit erhalten wir in der Numerik bessere Ergebnisse, als wir in der Theorie beweisen konnten.

Wenn wir nun allerdings y_d nicht wie oben beschrieben konstruieren, sondern frei wählen, dann erhalten wir nicht die Eigenschaft, dass u_α für ein kleines α auch die Aufgabe für $\alpha = 0$ löst. Wir setzen

$$y_d = 10^{-1} \sin(3\pi x) \sin(2\pi y) e^{2x} e^y$$

und belassen die anderen Parameter auf den oben angegebenen Werten. Für diese Aufgabe kennen wir u_0 nicht, können aber mit der Gleichung (2.9b) überprüfen, ob $u_\alpha = u_0$, da u_0 die einzige Nullstelle der linken Seite von (2.9b) ist. Bezeichnen wir nun den Wert dieser linken Seite mit $F(u)$, so erhalten wir mit $c = 10$ Abbildung 2.6.

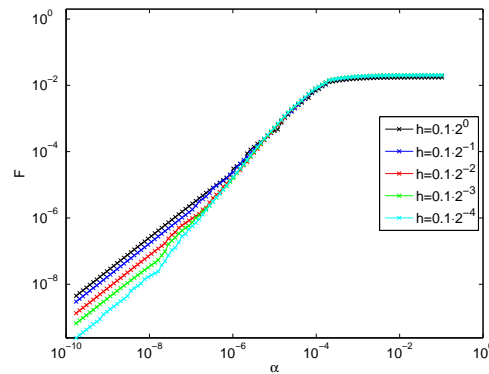


Abbildung 2.6: Werte $\|F(u_\alpha)\|_2$ mit F aus (2.9b)

Wenn wir bei einer Kantengitterlänge $h = 0.05$ u_α darstellen lassen, erkennen wir, dass für manche x_j $u(x_j)$ nicht die Werte aus $\{u_a, 0, u_b\}$ annimmt und auch für $\alpha \rightarrow 0$ gegen andere Werte konvergiert. Man könnte nun vermuten, dass sich um die Gebiete, in denen $u \in \{u_a, u_b\}$ gilt, ein Übergangsbereich einstellt. Diese müssten wir erkennen, wenn wir das Gitter verfeinern. In Abbildung 2.7 ist u_α für zwei Gittergrößen dargestellt. Aber auch bei der Kantengitterlänge von $h = 0.025$ sehen wir keinen stetigen Übergang an den Rändern der Gebiete $u \in \{u_a, u_b\}$. Wir können also vermuten, dass für dieses y_d die diskretisierten Lösungen $u_0^{(h)}$ Punkte besitzen, an denen $u_0^{(h)} \notin \{u_a, 0, u_b\}$ gilt, aber für exakte Lösung u_0 gilt $u_0 \in \{u_a, 0, u_b\}$.

Nun stellt sich die Frage, worin sich die beiden y_d unterscheiden, da für das erste die Lösung bei einem $\alpha > 0$ angenommen wurde, während sich bei dem zweiten die Lösung der diskretisierten Aufgabe vermutlich von der diskretisierten Lösung der exakten

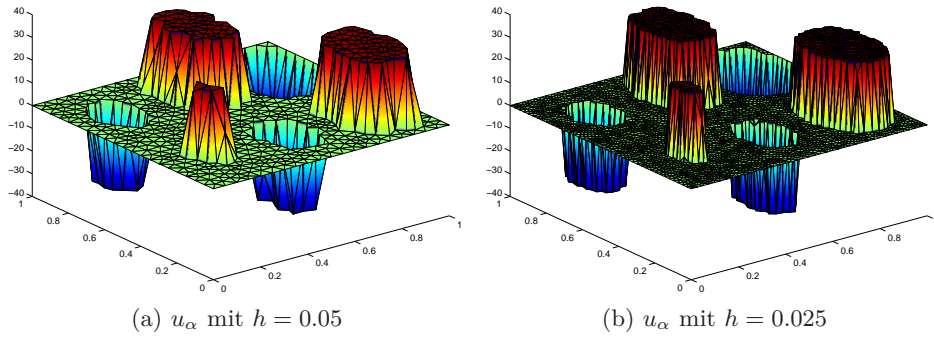


Abbildung 2.7: Darstellung von u_α für $\alpha = 10^{-10}$

Aufgabe unterscheidet. Aus Gleichung (2.19) erhalten wir, dass y_d aus zwei verschiedenen Anteilen besteht. y_p wurde aus $C^\infty(\bar{\Omega})$ gewählt, wohingegen für den Anteil \bar{y} gilt, dass $-\Delta \bar{y} = \bar{u}$ Sprünge in der Höhe von $|u_a| = |u_b| = 30$ aufweist. In unserem zweiten Beispiel hatten wir hingegen $y_d \in C^\infty(\bar{\Omega})$ gewählt. Damit erweist sich das erste Beispiel günstiger, da bereits in y_d die Informationen über die Lage von $u \in \{u_a, u_b\}$ enthalten sind.

3 Ein Problem mit streifenförmigen Lösungen

In diesem Kapitel soll untersucht werden, ob es mit einem passenden Zielfunktional möglich ist, Lösungen, bei denen Sparsity entlang Streifen auftritt, zu erzeugen. Es soll ein Zielfunktional mit einem Term der Form

$$f(u) := \int \left(\int u(x, y)^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \, dx \tag{3.1}$$

untersucht werden. Dieser Term lässt sich auch als $f(u) = \|(x \mapsto \|u(x, \cdot)\|_2)\|_1$ schreiben. Da wir aus Kapitel 2 wissen, dass die L^1 -Norm dafür sorgt, dass die Steuerung auf Teilen des Gebiets identisch 0 ist, können wir erwarten, dass die L^2 -Norm $\|u(x, \cdot)\|_2$ für manche x identisch 0 wird. Damit können wir das gewünschte Verhalten erwarten.

In den ersten beiden Abschnitten wird eine Aufgabe mit L^2 -Norm behandelt, um Lösungstechniken zu erkennen und diese auf den komplizierteren Ansatz anzuwenden.

3.1 Eine Aufgabe mit L^2 -Norm

Es soll folgende Aufgabe behandelt werden

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimiere} \quad J(y, u) := \frac{1}{2}\|y - y_d\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|u\|_2^2 + \beta\|u\|_2 \\ \text{unter} \quad (y, u) \in L^2 \times L^2 \\ \quad \quad u_a \leq u \leq u_b \\ \quad \quad -\Delta y = u \text{ in } \Omega \\ \quad \quad y = 0 \text{ auf } \Gamma \end{array} \right\} \tag{3.2}$$

Hier bei sind $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, sowie $u_a, u_b \in L^2(\Omega)$, $u_a < 0 < u_b$ und für Ω sei dieselbe Regularität wie im vorherigen Kapitel gefordert. Wir erhalten wieder den Steuerungs-Zustands-Operator $\mathcal{S} : L^1 \rightarrow L^2$. Damit können wir auch hier das reduzierte Zielfunktional $\hat{J}(u) = J(\mathcal{S}u, u)$ einführen. Weiterhin ist U_{ad} in L^2 schwach kompakt, dies folgt aus dem Satz von Banach-Alaoglu-Bourbaki, da L^2 reflexiv ist, und somit existiert eine eindeutige optimale Steuerung (analog zu Satz 2.8).

Es ist anzumerken, dass der Parameter α nicht die Rolle eines Regularisierungsparameters hat. Es wird sich zeigen, dass wir auch für $\alpha = 0$ Lösungen ohne zusätzliche Schwierigkeiten berechnen können.

Um nun die Optimalitätsbedingung (2.4) anwenden zu können, berechnen wir den Subgradienten der L^2 -Norm und erhalten

$$\partial\|u\|_2 = \begin{cases} \left\{ \frac{u}{\|u\|_2} \right\} & u \neq 0 \\ B_1(0) & u = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Damit ergibt sich die Variationsungleichung

$$\langle u - \bar{u}, \alpha \bar{u} + \beta \bar{\lambda} - \bar{p} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (3.4)$$

mit $\bar{\lambda} \in \partial \|\bar{u}\|_2$ und $\bar{p} = \mathcal{S}^*(y_d - \mathcal{S}\bar{u})$. Damit erhalten wir

3.1 Satz. Für Aufgabe (3.2) gilt $\bar{u} = 0 \Leftrightarrow \beta \geq \|\mathcal{S}^*y_d\|_2$.

Beweis. Gelte $\bar{u} = 0$. Gleichung (3.4) ergibt sich zu

$$\langle u, \beta \bar{\lambda} - \mathcal{S}^*y_d \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

mit $\bar{\lambda} \in B_1(0)$ in $L^2(\Omega)$. Wegen $u_a < 0 < u_b$ ergibt sich $\beta \bar{\lambda} - \mathcal{S}^*y_d = 0$ oder anders formuliert $\|\mathcal{S}^*y_d\|_2 \leq \beta$.

Ist hingegen $\beta \geq \|\mathcal{S}^*y_d\|_2$, dann ist die Variationsungleichung (3.4) für $\bar{u} = 0$ erfüllt und 0 somit die eindeutig bestimmte Lösung. ■

Damit haben wir ein Kriterium, mit dem wir entscheiden können, ob die Optimallösung 0 ist. Daher werden wir uns im weiteren nur mit dem Fall $\bar{u} \neq 0$ beschäftigen. Die Variationsungleichung ergibt dann

$$\langle u - \bar{u}, \alpha \bar{u} + \beta \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|_2} - \bar{p} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (3.5)$$

Aus dieser Bedingung erhalten wir sofort

3.2 Lemma. Sei $\beta < \|\mathcal{S}^*y_d\|_2$. Dann gilt, \bar{u} löst die Aufgabe (3.2) genau dann, wenn \bar{u} die Aufgabe

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimiere} \quad J(y, u) := \frac{1}{2}\|y - y_d\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\|\bar{u}\|_2}\right)\|u\|_2^2 \\ \text{unter} \quad (y, u) \in L^2 \times L^2 \\ \quad \quad u_a \leq u \leq u_b \\ \quad \quad -\Delta y = u \text{ in } \Omega \\ \quad \quad y = 0 \text{ auf } \Gamma \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

löst.

Beweis. Aus der Gleichung (3.5) erhält man, dass beide Optimierungsaufgaben dieselbe Variationsungleichung und damit dieselbe Lösung besitzen. ■

Nun können wir für $\nu > 0$ das Zielfunktional $J^{(\nu)}(u) := \frac{1}{2}\|\mathcal{S}u - y_d\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\nu}\right)\|u\|_2^2$ definieren. Bezeichnen wir nun die Lösung von $\min_{u \in U_{ad}} J^{(\nu)}(u)$ mit $u^{(\nu)} = u_{\alpha+\beta/\nu}$, dann können wir die Lösung von (3.2) mit dem folgenden Satz charakterisieren.

3.3 Satz. $\bar{u} \neq 0$ löst die Aufgabe (3.2) genau dann, wenn $\bar{u} = u^{(\nu)}$ und $\|u^{(\nu)}\|_2 = \nu$ für $\nu > 0$ gilt.

Beweis. $\bar{u} \neq 0$ löst die Aufgabe (3.2) $\Leftrightarrow \bar{u} \neq 0$ löst die Aufgabe (3.6) $\Leftrightarrow \bar{u} \neq 0$ löst $\min_{u \in U_{ad}} J^{(\|\bar{u}\|_2)}(u) \Leftrightarrow \|\bar{u}\|_2 = \nu > 0, \bar{u} = u^{(\nu)}$. ■

Die Sätze 3.1 und 3.3 können wir wie folgt zusammenfassen.

3.4 Satz. \bar{u} löst die Aufgabe (3.2) genau dann, wenn $\bar{u} = u^{(\nu)}$, $\|u^{(\nu)}\|_2 = \nu$ und, falls $\bar{u} = 0$, für den adjungierten Zustand $\|\bar{p}\|_2 \leq \beta$ gilt.

Beweis. Folgt mit Fallunterscheidung in $\bar{u} = 0$ und $\bar{u} \neq 0$ direkt aus den Sätzen 3.1 und 3.3. ■

Wir definieren nun die Funktion $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu = 0 \\ \|u^{(\nu)}\|_2 & \text{für } \nu > 0. \end{cases}$$

Bevor wir nun wichtige Eigenschaften von Φ zeigen können, benötigen wir noch ein Lemma.

3.5 Lemma. Sei u_α die Lösung von $\min_{u \in U_{ad}} (\frac{1}{2} \|Su - y_d\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_2^2)$. Dann gilt $\alpha u_\alpha \rightarrow S^* y_d$ in L^2 für $\alpha \rightarrow \infty$.

Beweis. Zunächst zeigen wir einen Hilfssatz: Sei $b \in L^2(\Omega)$ und $b(x) > 0$ für fast alle $x \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein δ mit

$$\int_B b^2 \, d\mu \geq \delta \quad \forall B \subset \Omega, \mu(B) \geq \varepsilon.$$

Hierfür definieren wir eine Funktion $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g(\gamma) := \mu(\{b^2 \leq \gamma\})$. Sofort folgt g monoton wachsend und $g(0) = 0$. Damit existiert $\lim_{\gamma \rightarrow 0} g(\gamma)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} g(\gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(2^{-n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{b^2 \leq 2^{-n}\}) \\ &= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{b^2 \leq 2^{-n}\}\right) = \mu(\{b^2 = 0\}) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist g stetig in 0 und es existiert ein $\delta_0 > 0$ mit $g(\delta_0) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Wir definieren $G := \{b^2 \leq \delta_0\}$ und somit gilt $\mu(G) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Sei nun $B \subset \Omega$ und $\mu(B) \geq \varepsilon$. Dann gilt

$$\int_B b^2 \, d\mu \geq \int_{B \setminus G} b^2 \, d\mu \geq \int_{B \setminus G} \delta_0 \, d\mu = \mu(B \setminus G) \cdot \delta_0 \geq \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \delta_0 =: \delta.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Als hinreichende und notwendige Optimalitätsbedingung für die Aufgabe erhält man (vergleiche [Sta08] oder [Trö05]) Gleichung (2.11) mit $\beta = 0$. Klar ist, dass $\|u_\alpha\|_2 \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow \infty$.

Weiterhin gilt $\mu(\{\mu_\alpha \neq 0\}) \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow \infty$. Wäre dem nicht so, so würde $\exists \varepsilon > 0 : \forall \alpha_0 > 0 : \exists \alpha > \alpha_0 : \mu(\{\mu_\alpha \neq 0\}) \geq \varepsilon$ gelten. Aus der Komplementaritätsbedingung folgt nun $|u_\alpha| \geq \min(-u_a, u_b) > 0$ auf $\{\mu_\alpha \neq 0\}$ und aus dem Hilfssatz erhalten wir

$$\|u_\alpha\|_2^2 \geq \int_{\{\mu_\alpha \neq 0\}} (\min(-u_a, u_b))^2 \, d\mu \geq \delta,$$

wobei δ nur von ε , u_a und u_b abhängt. Dies steht im Widerspruch zu $u_\alpha \rightarrow 0$ und somit gilt $\mu(\{\mu_\alpha \neq 0\}) \rightarrow 0$.

Sei nun $C_1 := \sup_{u \in U_{ad}} \|\mathcal{S}^* \mathcal{S}u\|_\infty$ und $C_2 := \|\mathcal{S}^* y_d\|_\infty$. Aus Gleichung (2.11) erhalten wir die Beziehung

$$\mathcal{S}^*(\mathcal{S}u - y_d) + \alpha u_\alpha + \mu_\alpha = 0.$$

Somit gilt auf der Menge $\{\mu_\alpha > 0\}$

$$-C_2 \leq \alpha u_b - \mathcal{S}^* y_d = \alpha u_\alpha - \mathcal{S}^* y_d = -\mathcal{S}^* \mathcal{S}u_\alpha - \mu_\alpha \leq C_1 - \mu_\alpha,$$

also

$$0 \leq \mu_\alpha \leq C_1 + C_2.$$

Analog erhalten wir auf der Menge $\{\mu_\alpha < 0\}$

$$0 \geq \mu_\alpha \geq -C_1 - C_2.$$

Damit gilt

$$\|\alpha u_\alpha - \mathcal{S}^* y_d\|_2 \leq \|\mathcal{S}^* \mathcal{S}u_\alpha\|_2 + \|\mu_\alpha\|_2 \leq \|\mathcal{S}^* \mathcal{S}u_\alpha\|_2 + \mu(\{\mu_\alpha \neq 0\})^{\frac{1}{2}} \cdot (C_1 + C_2) \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

Nun können wir Eigenschaften von Φ herleiten.

3.6 Satz. Φ ist Lipschitz-stetig, monoton wachsend und auf \mathbb{R}^+ beschränkt. Für $\beta < \|\mathcal{S}^* y_d\|_2$ gilt, dass ein $\nu_0 > 0$ existiert, sodass

$$\Phi(\nu) > \nu \text{ für } \nu < \nu_0$$

$$\Phi(\nu) = \nu \text{ für } \nu = \nu_0$$

$$\Phi(\nu) < \nu \text{ für } \nu > \nu_0$$

für alle $\nu > 0$ gilt. Für $\beta \geq \|\mathcal{S}^* y_d\|_2$ gilt für alle $\nu > 0$

$$\Phi(\nu) < \nu.$$

Beweis. Die Monotonie folgt mit $u^{(\nu)} = u_{\alpha+\beta/\nu}$ daraus, dass $\alpha \mapsto \|u_\alpha\|_2$ monoton fallend ist. Die Lipschitz-Stetigkeit von Φ folgt direkt aus Satz 2.18 und die Beschränktheit aus der Beschränktheit von U_{ad} . Weiterhin ist klar, dass $\Phi(\nu) \rightarrow 0$ für $\nu \rightarrow 0$. Berechnen der Ableitung im Punkt 0 ergibt für $\beta < \|\mathcal{S}^* y_d\|_2$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\Phi(\nu)}{\nu} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\|u_{(\alpha+\beta/\nu)}\|_2}{\nu} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{(\alpha + \frac{\beta}{\nu}) \|u_{(\alpha+\beta/\nu)}\|_2}{(\alpha + \frac{\beta}{\nu}) \nu} = \frac{\|\mathcal{S}^* y_d\|_2}{\beta} > 1.$$

Damit wissen wir, dass für ein $\nu > 0$ $\Phi(\nu) > \nu$ gilt. Aus Satz 3.3 folgt nun, dass genau ein $\nu_0 > 0$ existiert mit $\Phi(\nu_0) = \nu_0$. Damit erhalten wir mit der Stetigkeit von Φ , dass $\Phi(\nu) > \nu$ für $\nu < \nu_0$ gilt. Aus der Beschränktheit erhalten wir $\Phi(\nu) < \nu$ für große ν . Die Aussage für $\beta \geq \|\mathcal{S}^* y_d\|_2$ folgt sofort aus der Stetigkeit und Beschränktheit von Φ , sowie der Nichtexistenz eines $\nu > 0$ mit $\Phi(\nu) = \nu$. \blacksquare

Wir wollen nun, um Ergebnisse aus [GGW08] zu verwenden, eine alternative Darstellung für $u^{(\nu)}$ und dementsprechend auch für Φ angeben. Aus der notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingung für $\min_{u \in U_{ad}} J^{(\nu)}(u)$ erhalten wir für $\nu > 0$, dass $u^{(\nu)}$ die (eindeutige) Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$u = \text{proj}_{[u_a, u_b]} \frac{\nu}{\alpha\nu + \beta} (\mathcal{S}^*(y_d - \mathcal{S}u)) \quad (3.7)$$

ist. Im Fall $\nu = 0$ ergibt diese Projektionsgleichung gerade $u = 0 = u^{(\nu)}$. Diese Gleichung bringt also die beiden Fälle $\nu = 0$ und $\nu \neq 0$ auf eine gemeinsame Form. In der Notation von [GGW08] haben wir für $\nu \in [0, \infty)$

$$g(\nu) = \frac{\nu}{\alpha\nu + \beta} \mathcal{S}^* y_d$$

$$G(\nu) = \frac{\nu}{\alpha\nu + \beta} \mathcal{S}^* \mathcal{S}.$$

3.7 Satz. Die Abbildungen $\nu \mapsto u^{(\nu)}$ und Φ sind richtungsdifferenzierbar auf $[0, \infty)$. Weiterhin ist Φ fast überall differenzierbar.

Beweis. Die Richtungs-differenzierbarkeit folgt aus [GGW08]. Da Φ Lipschitz-stetig ist, ist es nach dem Satz von Rademacher auch fast überall differenzierbar. ■

3.2 Numerische Verfahren für die L^2 -Aufgabe

In diesem Abschnitt sollen numerische Verfahren für die Aufgabe (3.2) hergeleitet und untersucht werden. Betrachten wir die definierte Funktion $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, so erhalten wir (aus Satz 3.6) in Abhängigkeit von β und $\|\mathcal{S}^* y_d\|_2$ zwei mögliche Verläufe, die in Abbildung 3.1 dargestellt werden.

Man sieht, dass im Fall $\beta < \|\mathcal{S}^* y_d\|_2$ zwei Fixpunkte $\nu = \Phi(\nu)$ vorhanden sind, wobei nur der Fixpunkt mit $\nu > 0$ von Interesse ist. Dies legt folgendes Vorgehen nahe:

Algorithmus 2 (Bisektion):

1. Prüfe, ob $\beta \geq \|\mathcal{S}^* y_d\|_2$.
2. Ist dies der Fall, dann ist $\bar{u} = 0$ Lösung.
3. Sonst wähle kleines ν_1 mit $\Phi(\nu_1) > \nu_1$ und großes ν_2 mit $\Phi(\nu_2) < \nu_2$.
4. Führe nun das Verfahren der Bisektion (fortlaufende Intervallhalbierung) durch, um einen Fixpunkt von Φ zu finden.

In Schritt 4 dieses Verfahrens muss jeweils $\Phi(\nu)$ bestimmt werden. Dazu eignet sich ein semiglatte Newtonverfahren, wie in Kapitel 2 besprochen. Dieses funktioniert auch im Falle $\alpha = 0$, da für den Regularisierungsparameter im semiglatten Newtonverfahren immer $\alpha + \frac{\beta}{\nu} \geq \alpha + \frac{\beta}{\nu_{max}} > 0$ gilt, wobei $\nu_{max} = \|\max(u_b, -u_a)\|_2 + 1$ als obere Schranke für den Fixpunkt ν dient.

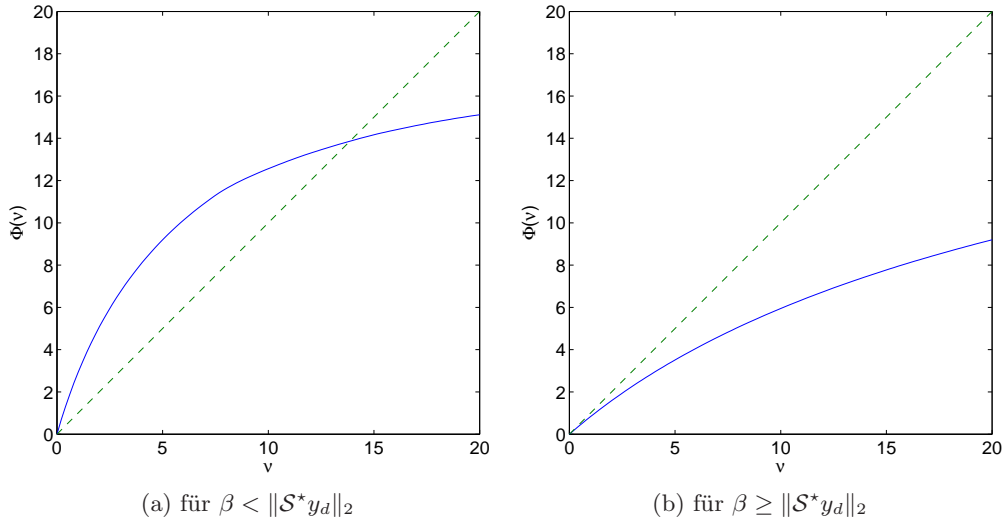


Abbildung 3.1: Darstellung der Funktion Φ (blau)

In jeder Iteration wird der größtmögliche Fehler $|\nu_k - \nu_0|$ halbiert, man erhält also

$$|\nu_{k+1} - \nu_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot C.$$

Damit ergibt sich für den Fehler bezüglich ν lineare Konvergenz. Aus $\alpha + \frac{\beta}{\nu} > 0$ folgt die Lipschitz-Stetigkeit von $\nu \mapsto u^{(\nu)}$ und damit ergibt sich auch lineare Konvergenz der Steuerungen.

Eine weitere Möglichkeit die Fixpunkte der Funktion Φ zu finden, ist die Fixpunktiteration. Dazu wählt man einen Startpunkt ν_1 und setzt $\nu_{k+1} = \Phi(\nu_k)$ für $k = 1, 2, \dots$. Eine schlechte Wahl als Startpunkt ist der Fixpunkt $\nu = 0$, da man mit diesem im Fall $\beta < \|\mathcal{S}^* y_d\|_2$ die Lösung nicht findet. Wir erhalten also

Algorithmus 3 (Fixpunktverfahren):

1. Wähle ν_1 aus $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
2. Berechne $\nu_{k+1} = \Phi(\nu_k)$ für $k = 1, 2, \dots$

Die Fragen nach der Konvergenz und der Konvergenzgeschwindigkeit beantwortet der folgende Satz.

3.8 Satz. *Das Fixpunktverfahren für Φ konvergiert für Startwerte $\nu_1 > 0$ gegen die Lösung von (3.2). Im Fall $\alpha > 0$, $\beta < \|\mathcal{S}^* y_d\|_2$ oder $\beta > \|\mathcal{S}^* y_d\|_2$ läßt sich die lineare Konvergenzordnung beweisen.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $\beta \geq \|\mathcal{S}^* y_d\|_2$. Dann erhalten wir aus Satz 3.6, dass die Folge $\{\nu_k\}$ monoton fallend und von unten beschränkt ist. Damit konvergiert sie gegen ein ν_0 . Aus der Stetigkeit von Φ folgt nun $\Phi(\nu_0) \leftarrow \Phi(\nu_k) = \nu_{k+1} \rightarrow \nu_0$ und somit

$\Phi(\nu_0) = \nu_0$. Da aber 0 der eindeutig bestimmte Fixpunkt ist, gilt $\nu_0 = 0$ und die Folge konvergiert gegen die Lösung. Ist weiterhin $\beta > \|\mathcal{S}^*y_d\|_2$, so wissen wir, dass $\Phi'(0) < 1$ gilt, und damit folgt die lineare Konvergenzordnung aus dem Fixpunktsatz von Banach.

Sei nun $\beta < \|\mathcal{S}^*y_d\|_2$. Wir betrachten zuerst den Fall $\nu_1 > \nu_0$, wobei ν_0 die positive Lösung von $\Phi(\nu) = \nu$ ist. Wieder ist die Folge $\{\nu_k\}$ monoton fallend und von unten beschränkt durch ν_0 . Damit existiert wieder ein Grenzwert und es lässt sich analog zeigen, dass dieser gerade ν_0 ist. Für $\alpha > 0$ erhalten wir nun aus Satz 2.18 für $\nu' > \nu_0$

$$\|u_{\nu'}\|_2 - \|u_{\nu_0}\|_2 \leq \|u_{\nu'} - u_{\nu_0}\|_2 \leq \frac{\|u_{\nu'}\|_2 \nu_0}{\alpha \nu_0 + \beta} \left| \frac{\beta}{\nu'} - \frac{\beta}{\nu_0} \right| = \frac{\beta}{\alpha \nu_0 + \beta} \frac{\|u_{\nu'}\|_2}{\nu'} (\nu' - \nu_0).$$

Damit haben wir

$$\frac{\|u_{\nu'}\|_2 - \|u_{\nu_0}\|_2}{\nu' - \nu_0} \leq \frac{\beta}{\alpha \nu_0 + \beta} \frac{\|u_{\nu'}\|_2}{\nu'}$$

und $\nu' \rightarrow \nu_0$ liefert

$$\Phi^+(\nu_0) \leq \frac{\beta}{\alpha \nu_0 + \beta} < 1,$$

wobei mit Φ^+ die positive Richtungsableitung bezeichnet wird. Damit folgt die lineare Konvergenzordnung.

Sei nun $0 < \nu_1 < \nu_0$. Dann ist $\{\nu_k\}$ monoton wachsend und konvergiert analog gegen ν_0 . Für $\alpha > 0$ gilt nun für $\nu' < \nu_0$

$$\|u_{\nu'}\|_2 - \|u_{\nu_0}\|_2 \leq \|u_{\nu_0} - u_{\nu'}\|_2 \leq \frac{\|u_{\nu_0}\|_2 \nu'}{\alpha \nu' + \beta} \left| \frac{\beta}{\nu_0} - \frac{\beta}{\nu'} \right| = \frac{\beta}{\alpha \nu' + \beta} \frac{\|u_{\nu_0}\|_2}{\nu_0} (\nu_0 - \nu').$$

Damit haben wir

$$-\frac{\|u_{\nu'}\|_2 - \|u_{\nu_0}\|_2}{\nu' - \nu_0} \leq \frac{\beta}{\alpha \nu' + \beta} \frac{\|u_{\nu_0}\|_2}{\nu_0}$$

und $\nu' \rightarrow \nu_0$ liefert

$$-\Phi^-(\nu_0) \leq \frac{\beta}{\alpha \nu_0 + \beta} < 1,$$

wodurch wir mit $\Phi^-(\nu_0) > -1$ wieder die lineare Konvergenzordnung erhalten. ■

Eine weitere Möglichkeit die Nullstellen von $\Phi(\nu) - \nu$ zu finden ist das Newtonverfahren.

Algorithmus 4 (Newtonverfahren):

1. Wähle großes $\nu_1 > 0$
2. Berechne $\nu_{k+1} = \nu_k - (\Phi(\nu_k) - \nu_k) / (\Phi'(\nu_k) - 1)$ für $k = 1, 2, \dots$

Unter der Annahme, dass die Funktion Φ konkav ist, zeigt sich, dass der Newtonschritt korrekt definiert ist ($\Phi'(\nu_k) \neq 1$) und dass das Newtonverfahren gegen die richtige Lösung konvergiert. Die Konvergenzrate ist dann quadratisch. Allerdings konnte die Konkavität von Φ nicht bewiesen werden.

In diesem Algorithmus muss in Schritt 2 jeweils die Lösung $u^{(\nu_k)}$ mit einem semiglaten Newtonverfahren berechnet werden. Damit muß man zusätzlich in jedem Schritt ein Newtonverfahren lösen. Die Idee ist nun, dass die Lösung dieser beiden Gleichungssysteme gekoppelt werden. Wir definieren zunächst (vergleiche Gleichung 2.17 mit $\beta = 0$)

$$F(u, p, \nu) = u + \alpha_\nu^{-1} (-p + \max(0, p - \alpha_\nu u_b) + \min(0, p - \alpha_\nu u_a)),$$

wobei $\alpha_\nu = \alpha + \frac{\beta}{\nu}$. Nun sucht man eine Lösung (u, ν) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} F(u, \mathcal{S}^*(y_d - \mathcal{S}u), \nu) &= 0 \\ \|u\|_2 - \nu &= 0. \end{aligned}$$

Für Diskretisierung der Lösung dieses Gleichungssystem ist es sinnvoll, die Variablen y und p mit in das Gleichungssystem aufzunehmen, da man sonst nicht die Dünnbesetztheit der FEM-Matrizen ausnutzen kann. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} F(u, p, \nu) &= 0 \\ u - A^*y &= 0 \\ y + Ap &= y_d \\ \|u\|_2 - \nu &= 0. \end{aligned}$$

Wir definieren nun dieses Gleichungssystem als $G : L^2 \times L^2 \times H \times \mathbb{R} \rightarrow L^2 \times L^2 \times H \times \mathbb{R}$,

$$G(u, y, p, \nu) = \begin{pmatrix} F(u, p, \nu) \\ u - A^*y \\ y + Ap - y_d \\ \|u\|_2 - \nu \end{pmatrix}.$$

Da die max- und min-Terme von H nach L^2 verallgemeinert differenzierbar sind, ist G für $u \neq 0$ verallgemeinert differenzierbar und eine Ableitung ist gegeben durch

$$G'(u, y, p, \nu) = \begin{pmatrix} I & 0 & -\alpha_\nu^{-1}\chi I & \frac{-\beta}{(\alpha_\nu + \beta)^2}\chi I p \\ I & -A^* & 0 & 0 \\ 0 & I & A & 0 \\ \frac{u}{\|u\|_2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei $I = \{\alpha_\nu \cdot u_a < p < \alpha_\nu \cdot u_b\}$. Da die zweite und dritte Gleichung linear sind, sind diese nach dem ersten Schritt immer erfüllt. Nun ist allerdings unklar, ob das Gleichungssystem

$$G'(u_k, y_k, p_k, \nu_k) \cdot \begin{pmatrix} du_k \\ dy_k \\ dp_k \\ d\nu_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F(u_k, y_k, p_k) \\ 0 \\ 0 \\ \|u_k\|_2 - \nu_k \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

in jedem Schritt des Verfahrens eindeutig lösbar ist.

In der Praxis hat es sich als günstig erwiesen, $u_1 = u^{(\nu_1)}$ zu wählen, um die Konvergenzeigenschaften zu verbessern.

Algorithmus 5 (gekoppeltes Newtonverfahren):

1. Wähle ν_1 groß.
2. Berechne $u_1 = u^{(\nu_1)}$, $y_1 = \mathcal{S}u_1$ und $p_1 = \mathcal{S}^*(y_d - y_1)$.
3. Setze $k \leftarrow 1$.
4. Löse (3.8) und aktualisiere die Variablen ($u_{k+1} = u_k + du_k$ etc.).
5. Setze $k \leftarrow k + 1$ und gehe zu Schritt 4.

Nun sollen die vier Algorithmen bezüglich ihrer Leistungsfähigkeit verglichen werden. In jedem Algorithmus müssen Gleichungssysteme gelöst werden, zum Beispiel zur Berechnung von $u^{(\nu)}$ oder zur Ermittlung von Ableitungen. Wenn wir nun die Aufgabe mittels FEM diskretisieren und n innere Punkte haben, haben die größten Gleichungssysteme die Dimension $3n$, da sie in u , y und p formuliert sind. Für das gekoppelte Newtonverfahren haben die Gleichungssysteme die Dimension $3n + 1$, da die Variable ν enthalten ist. Im folgenden werden nun diese großen Gleichungssysteme gezählt. Die Verfahren wurden abgebrochen, wenn ein Punkt ν mit $|\Phi(\nu) - \nu| < \varepsilon$ gefunden wurde. Folgende Parameter wurden verwendet:

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 1]^2 \\ y_d &= \frac{1}{6} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{2x} \\ u_a &= -30 \\ u_b &= 30 \\ \alpha &= 10^{-5} \\ \beta &= 10^{-3} \\ h_{max} &= 0.1 \text{ (maximale Kantenlänge), } n = 137\end{aligned}$$

Es ergaben sich folgende Werte:

ε	Bisektion	Fixpunkt v.	Newtonv.	gek. Newtonv.
10^{-1}	5	10	10	5
10^{-2}	19	11	12	7
10^{-3}	21	13	12	7
10^{-4}	24	15	12	7
10^{-5}	29	17	12	8
10^{-6}	33	18	14	8
10^{-7}	33	20	14	8
10^{-8}	39	22	14	8
10^{-9}	39	24	14	8
10^{-10}	46	26	14	8

Wie erwartet, zeigt sich für die ersten zwei Verfahren die lineare Konvergenzordnung, während bei letzten beiden die Anzahl gelöster Gleichungssysteme durch die quadratische Konvergenzordnung klein bleibt.

Für eine maximale Kantenlänge von $h = 0.05$, $n = 647$ erhalten wir folgende Werte:

ε	Bisektion	Fixpunkt v.	Newton v.	gek. Newton v.
10^{-1}	21	12	12	6
10^{-2}	21	14	14	8
10^{-3}	28	16	14	8
10^{-4}	28	17	14	8
10^{-5}	35	19	14	9
10^{-6}	37	21	16	9
10^{-7}	41	22	16	9
10^{-8}	44	24	16	10
10^{-9}	47	26	16	10
10^{-10}	51	27	16	10

Für eine maximale Kantenlänge von $h = 0.025$, $n = 2650$ erhalten wir schließlich folgende Werte:

ε	Bisektion	Fixpunkt v.	Newton v.	gek. Newton v.
10^{-1}	19	13	12	6
10^{-2}	26	16	14	8
10^{-3}	30	18	14	8
10^{-4}	32	19	14	9
10^{-5}	36	21	14	9
10^{-6}	38	22	16	9
10^{-7}	41	24	16	9
10^{-8}	41	26	16	10
10^{-9}	50	27	16	10
10^{-10}	51	29	16	10

Bei allen Verfahren zeigt sich eine leichte Erhöhung der Iterationszahl.

Weiterhin zeigt sich, dass auch das Newton- und das gekoppelte Newtonverfahren gegen den richtigen Fixpunkt von Φ konvergieren, wenn man mit einem großen Startwert beginnt. Als Startwert für diese Verfahren wird

$$\nu = \|\max(u_b, -u_a)\|_2 + 1$$

vorgeschlagen, da es auf jeden Fall größer als der Fixpunkt ist. Für die anderen beiden Verfahren wurde derselbe Startwert verwendet.

Um zu zeigen, dass diese Verfahren auch für den Fall $\alpha = 0$ funktionieren, wurde auch für diesen Fall eine Rechnung für die maximale Kantenlänge $h = 0.1$ durchgeführt und es ergaben sich nur eine leicht erhöhte Anzahl Iterationen:

ε	Bisektion	Fixpunkt v.	Newtonv.	gek. Newtonv.
10^{-1}	19	11	12	6
10^{-2}	22	14	15	8
10^{-3}	25	16	15	8
10^{-4}	29	18	15	8
10^{-5}	31	19	15	9
10^{-6}	33	21	17	9
10^{-7}	33	23	17	9
10^{-8}	41	25	17	10
10^{-9}	45	26	17	10
10^{-10}	48	28	17	10

3.3 Der passende Raum für das Zielfunktional

In diesem Abschnitt soll ein Raum definiert werden, der zu dem Zielfunktional (3.1) passt und dessen Eigenschaften sollen untersucht werden.

3.9 Definition. Gegeben sei ein Gebiet Ω im \mathbb{R}^2 mit den Voraussetzungen aus Kapitel 2. Dann ist V der Raum aller meßbaren Funktionen u auf \mathbb{R}^2 , die außerhalb von Ω identisch 0 sind und für die

$$\int \left(\int u(x, y)^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

endlich ist.

3.10 Satz. V wird mit

$$\|u\|_V := \int \left(\int u(x, y)^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

zu einem normierten linearen Raum und es gilt

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

Beweis. Es ist klar, dass V ein linearer Raum ist. Sei nun $u, v \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|u + v\|_V &= \|(x \mapsto \underbrace{\|u(x, \cdot) + v(x, \cdot)\|_2}_{\leq \|u(x, \cdot)\|_2 + \|v(x, \cdot)\|_2})\|_1 \\ &\leq \|(x \mapsto \|u(x, \cdot)\|_2 + \|v(x, \cdot)\|_2)\|_1 \\ &\leq \|(x \mapsto \|u(x, \cdot)\|_2)\|_1 + \|(x \mapsto \|v(x, \cdot)\|_2)\|_1 \\ &= \|u\|_V + \|v\|_V. \end{aligned}$$

Damit ist $\|\cdot\|_V$ eine Norm und V ein normierter linearer Raum.

Sei nun $u \in L^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\|u\|_2^2 = \int u^2 \, d\mu.$$

Aus dem Satz von Fubini folgt nun

$$\|u\|_2^2 = \int \int u(x, y)^2 \, dy \, dx.$$

Damit wissen wir, dass $\hat{u}(x) := \|u(x, \cdot)\|_2 \in L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$. Also ist

$$\|u\|_V = \|\hat{u}\|_1 \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}} \|\hat{u}\|_2 = \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}} \|u\|_2$$

und $u \in V$. Damit gilt $L^2(\Omega) \hookrightarrow V$. Sei nun ein $u \in V$ gegeben. Dann gilt $\|u(x, \cdot)\|_1 \leq C \|u(x, \cdot)\|_2$ für fast alle x . Damit gilt auch

$$\int \int |u(x, y)| \, dy \, dx \leq C \int \left(\int u(x, y)^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \, dx.$$

Mit dem Satz von Tonelli folgt nun

$$\|u\|_1 \leq C \|u\|_V$$

und somit $V \hookrightarrow L^1(\Omega)$. ■

3.11 Satz. Der Dualraum V^* von V kann mit der Menge aller meßbaren Funktionen φ auf \mathbb{R}^2 , die außerhalb von Ω identisch 0 sind und für die

$$\operatorname{ess\,sup}_x \int \varphi(x, y)^2 \, dy$$

endlich ist, identifiziert werden. Es gilt dann

$$\langle u, \varphi \rangle_{V, V^*} = \int u \cdot \varphi \, d\mu.$$

Die Norm auf V^* ist

$$\|\varphi\|_{V^*} := \operatorname{ess\,sup}_x \left(\int \varphi(x, y)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \, dy.$$

Beweis. Sei $\hat{\varphi} \in V^*$ gegeben. Wegen $L^2(\Omega) \hookrightarrow V$ ist $\hat{\varphi}$ auch ein stetiges Funktional auf $L^2(\Omega)$ und nach dem Satz von Riesz existiert eine Darstellung $\varphi \in L^2(\Omega)$. Angenommen, es gelte $\operatorname{ess\,sup}_x \int \varphi(x, y)^2 \, dy = \infty$. Dann gilt $\forall \gamma > 0 : \mu_1(\{x : \|\varphi(x, \cdot)\|_2 > \gamma\}) > 0$. Wir setzen $X_\gamma = \{x : \|\varphi(x, \cdot)\|_2 > \gamma\}$ und definieren nun

$$u_\gamma(x, y) := \begin{cases} 0 & x \notin X_\gamma \\ \frac{\varphi(x, y)}{\|\varphi(x, \cdot)\|_2} & x \in X_\gamma \end{cases} \in L^2 \subset V.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(u_\gamma) &= \int \varphi \cdot u_\gamma \, d\mu \\ &= \int_{X_\gamma} \int \frac{\varphi(x, y)^2}{\|\varphi(x, \cdot)\|_2^2} \, dy \, dx \\ &= \mu_1(X_\gamma) \end{aligned}$$

und weiter

$$\|u_\gamma\|_V = \int_{X_\gamma} \frac{\|\varphi(x, \cdot)\|_2}{\|\varphi(x, \cdot)\|_2^2} dx \leq \mu_1(X_\gamma) \cdot \frac{1}{\gamma}.$$

Damit gilt

$$\|\hat{\varphi}\|_{V^*} \geq \frac{\hat{\varphi}(u_\gamma)}{\|u_\gamma\|_V} \geq \gamma \text{ für alle } \gamma > 0.$$

Dies widerspricht der Stetigkeit von $\hat{\varphi}$ und somit gilt $\text{ess sup}_x \int \varphi(x, y)^2 dy < \infty$.

Sei nun φ eine meßbare Funktion, für die $\text{ess sup}_x (\int \varphi(x, y)^2 dy)^{\frac{1}{2}} < \infty$ gilt. Für $u \in V$ haben wir

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle_{V, V^*} &= \int \underbrace{\int u \cdot \varphi dy}_{\leq \|u(x, \cdot)\|_2 \|\varphi(x, \cdot)\|_2} dx \\ &\leq \int \|u(x, \cdot)\|_2 \|\varphi(x, \cdot)\|_2 dx \\ &\leq \|u\|_V \cdot \text{ess sup}_x \left(\int \varphi(x, y)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Somit definiert φ ein stetiges lineares Funktional auf V und es gilt

$$\|\varphi\|_{V^*} = \text{ess sup}_x \left(\int \varphi(x, y)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

3.4 Optimalitätsbedingungen und Komplementaritätssystem

Wir betrachten nun in diesem Abschnitt die Aufgabe

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimiere } J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_d\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_2^2 + \beta \|u\|_V \\ \text{unter } (y, u) \in L^2 \times V \\ u_a \leq u \leq u_b \\ -\Delta y = u \text{ in } \Omega \\ y = 0 \text{ auf } \Gamma \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

mit $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $u_a, u_b \in V$, $y_d \in L^2(\Omega)$, $u_a < 0 < u_b$. Im Falle $\alpha > 0$ ergibt sich zusätzlich die Forderung $u \in L^2(\Omega)$ und wir wollen in diesem Falle $u_a, u_b \in L^2(\Omega)$ voraussetzen. Da $V \hookrightarrow L^1(\Omega)$ können wir wieder unseren Steuerungs-Zustands-Operator $\mathcal{S} : L^1 \rightarrow L^2$ nutzen. Damit definieren wir wieder $\hat{J}(u) := J(\mathcal{S}u, u)$. Wie in Kapitel 2 können wir die schwache Kompaktheit der zulässigen Menge U_{ad} zeigen.

3.12 Lemma. Für $u_a, u_b \in V$, $u_a \leq u_b$ ist die Menge $U_{ad} = \{u \in V : u_a \leq u \leq u_b \text{ f.ü. in } \Omega\}$ schwach kompakt.

Beweis. Analog zu Beweis von Lemma 2.5: Ersetze L^1 durch V und L^∞ durch V^* . ■

Aus der strengen Konvexität des reduzierten Zielfunktional folgt nun wieder die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

3.13 Lemma. *Das Subdifferential der V -Norm ist*

$$\partial\|u\|_V = \{v \in V^* : \forall x \in \Omega_x : v(x, \cdot) \in \partial\|u(x, \cdot)\|_2\},$$

wobei $\Omega_x = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Omega\}$ die Projektion von Ω auf die x -Achse ist. Anders formuliert

$$v \in \partial\|u\|_V \Leftrightarrow \forall x \in \Omega_x : \begin{cases} \|v(x, \cdot)\|_2 \leq 1 & \text{für } u(x, \cdot) = 0 \\ v(x, \cdot) = \frac{u(x, \cdot)}{\|u(x, \cdot)\|_2} & \text{für } u(x, \cdot) \neq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Beweis. Aus [IT79] erhalten wir

$$\partial\|u\|_V = \{v \in V^* : \|v\|_{V^*} \leq 1, \langle u, v \rangle_{V, V^*} = \|u\|_V\}.$$

Sei nun $v \in \partial\|u\|_V$ gegeben. Aus der ersten Bedingung folgt, dass

$$\|v(x, \cdot)\|_2 \leq 1$$

für fast alle $x \in \Omega_x$ gilt. Weiterhin gilt

$$\|u\|_V = \int \underbrace{\int u \cdot v \, dy}_{=: f(x)} \, dx.$$

Für die Funktion f erhalten wir für fast alle $x \in \Omega_x$

$$f(x) = \langle u(x, \cdot), v(x, \cdot) \rangle_2 \leq \|u(x, \cdot)\|_2 \|v(x, \cdot)\|_2 \leq \|u(x, \cdot)\|_2.$$

Damit folgt

$$\|u\|_V = \int f(x) \, dx \leq \int \|u(x, \cdot)\|_2 \, dx = \|u\|_V$$

und dies impliziert

$$f(x) = \|u(x, \cdot)\|_2.$$

Somit haben wir

$$\|v(x, \cdot)\|_2 \leq 1 \text{ und } \langle u(x, \cdot), v(x, \cdot) \rangle_2 = \|u(x, \cdot)\|_2,$$

womit $v(x, \cdot) \in \partial\|u(x, \cdot)\|_2$ folgt. Die andere Inklusion ist klar. ■

Aus Gleichung (2.4) erhalten wir die notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingung

$$-\bar{p} + \beta\bar{\lambda} + \alpha\bar{u} + \bar{\mu} = 0 \quad (3.11)$$

mit $\bar{\lambda} \in \partial \|\bar{u}\|_V$, $\bar{p} = \mathcal{S}^*(y_d - \mathcal{S}\bar{u})$ sowie $\bar{\mu} \in N(\bar{u} | U_{ad})$. Also

$$\bar{\mu} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } \bar{u}(x, y) = u_a(x, y) \\ \geq 0 & \text{für } \bar{u}(x, y) = u_b(x, y) \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen Lemma 3.13 können wir die Optimalitätsbedingung auf jedem Streifen einzeln betrachten und erhalten

$$\|\bar{p}(x, \cdot)\|_2 \leq \beta \quad \text{für } \|\bar{u}(x, \cdot)\|_2 = 0 \quad (3.12a)$$

$$\bar{u}(x, y) = \text{proj}_{[u_a, u_b]} \frac{\bar{p}(x, y)}{\alpha + \frac{\beta}{\|\bar{u}(x, \cdot)\|_2}} \quad \text{für } \|\bar{u}(x, \cdot)\|_2 \neq 0 \quad (3.12b)$$

3.14 Satz. Für $\alpha > 0$ und für alle $x \in \Omega_x$ gilt $\|\bar{u}(x, \cdot)\|_2 = 0$ genau dann, wenn $\|\bar{p}(x, \cdot)\|_2 \leq \beta$.

Beweis. Für $\|\bar{u}(x, \cdot)\|_2 = 0$ folgt $\|\bar{p}(x, \cdot)\|_2 \leq \beta$ sofort aus Gleichung (3.12a). Gelte nun $\|\bar{p}(x, \cdot)\|_2 \leq \beta$. Wäre nun $\bar{u}(x, \cdot) \neq 0$, würden wir mit Gleichung (3.12b) und

$$\|\bar{u}(x, \cdot)\|_2 \leq \frac{\|\bar{p}(x, y)\|_2}{\alpha + \frac{\beta}{\|\bar{u}(x, \cdot)\|_2}} < \frac{\|\bar{p}(x, \cdot)\|_2 \|\bar{u}(x, \cdot)\|_2}{\beta} \leq \|\bar{u}(x, \cdot)\|_2$$

einen Widerspruch erhalten. ■

Wie im Falle der Aufgabe mit L^2 -Norm erhalten wir auch hier wieder eine Charakterisierung der Lösung mit einer Hilfsaufgabe.

3.15 Lemma. Wenn \bar{u} die Aufgabe (3.9) löst, dann gilt, dass \bar{u} auch

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimiere} \quad J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_d\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_{N^C} \left(\alpha + \frac{\beta}{\|\bar{u}(x, \cdot)\|_2} \right) u(x, y)^2 \, d\mu(x, y) \\ \text{unter} \quad (y, u) \in L^2 \times V \\ \quad \quad u_a \leq u \leq u_b \\ \quad \quad u = 0 \text{ auf } N \\ \quad \quad -\Delta y = u \text{ in } \Omega \\ \quad \quad y = 0 \text{ auf } \Gamma \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

löst, wobei $N = \{(x, y) \in \Omega : \|\bar{u}(x, \cdot)\|_2 = 0\}$ die Nullstreifenmenge von \bar{u} und $N^C = \Omega \setminus N$ ihr Komplement ist.

Beweis. Auf der Menge N^C erhalten wir für diese Aufgabe gerade die Optimalitätsbedingung (3.12b), die von der Lösung \bar{u} von (3.9) erfüllt wird. ■

Hierbei ist zu beachten, dass das Zielfunktional dieser Aufgabe für manche $u \in V$ den Wert ∞ annimmt, da der Kostenterm $\alpha + \beta/\|u(x, \cdot)\|_2$ nicht in $L^\infty(\Omega)$ liegt.

Sei nun $\nu \in L^1(\Omega_x)$. Wir definieren nun $u^{(\nu)}$ als eindeutige Lösung von

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimiere} \quad J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_d\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_{N^c} (\alpha + \frac{\beta}{\nu(x)}) u(x, y)^2 \, d\mu(x, y) \\ \text{unter} \quad (y, u) \in L^2 \times V \\ \quad \quad u_a \leq u \leq u_b \\ \quad \quad u = 0 \text{ auf } N \\ \quad \quad -\Delta y = u \text{ in } \Omega \\ \quad \quad y = 0 \text{ auf } \Gamma, \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

hierbei ist $N = \{(x, y) \in \Omega : \nu(x) = 0\}$. In Analogie zu der Aufgabe mit L^2 -Term suchen wir auch hier wieder eine Lösung der Fixpunktgleichung $u = u^{(\nu)}$, wobei $\nu(x) = \|u(x, \cdot)\|_2$. Als Äquivalent zu Satz 3.4 erhalten wir

3.16 Satz. \bar{u} löst die Aufgabe (3.9) genau dann, wenn $\bar{u} = u^{(\nu)}$, $\|u^{(\nu)}(x, \cdot)\|_2 = \nu(x)$ für fast alle $x \in \Omega_x$ und für fast alle x mit $\bar{u}(x, \cdot) = 0$ die Komplementaritätsbedingung $\|\bar{p}(x, \cdot)\|_2 \leq \beta$ gilt.

Beweis. Löst \bar{u} die Aufgabe (3.9), dann erhalten wir die Gleichungen (3.12a) und (3.12b), woraus mit Lemma 3.15 sofort die Behauptung folgt.

Gelte nun $\bar{u} = u^{(\nu)}$, $\|u^{(\nu)}(x, \cdot)\|_2 = \nu(x)$ und für fast alle x mit $\bar{u}(x, \cdot) = 0$ die Komplementaritätsbedingung $\|\bar{p}(x, \cdot)\|_2 \leq \beta$. Aus der Optimalitätsbedingung für die Aufgabe (3.14) erhalten wir (3.12b). Die Bedingung (3.12a) folgt sofort aus der Voraussetzung. Damit ist die Optimalitätsbedingung (3.12) erfüllt und wir erhalten die Optimalität von \bar{u} . ■

Mit diesem Satz kann man die Aufgabe (3.9) auch als unendlich viele, gekoppelte Aufgaben des Typs (3.2) deuten. Auch die Optimalitätseigenschaft ist dann analog. Es kann nun vermutet werden, dass auch bei dieser Aufgabe die Eigenschaft vorliegt, dass Fixpunkte von $\nu \mapsto u^{(\nu)}$, in denen die Komplementarität (3.12a) nicht erfüllt ist, abstoßend sind, während der eine Fixpunkt, der zusätzlich (3.12a) erfüllt, anziehend ist.

3.5 Numerische Berechnung

Für diesen Abschnitt fordern wir zusätzlich $u_a, u_b \in L^2$, um wieder Ergebnisse aus [GGW08] verwenden zu können.

Um Probleme an den Stellen $\nu(x) = 0$ zu vermeiden, definieren wir wieder $u^{(\nu)}$ als Lösung von

$$u = \text{proj}_{[u_a, u_b]} \frac{\nu}{\alpha \cdot \nu + \beta} \underbrace{\mathcal{S}^*(y_d - \mathcal{S}u)}_{:=p}.$$

Wir definieren die Funktion $\Phi : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $\nu \mapsto \Phi(\nu)$,

$$(\Phi(\nu))(x) := \|u^{(\nu)}(x, \cdot)\|_2.$$

Das Fixpunktverfahren ergibt sich nun analog wie für die Aufgabe mit L^2 -Norm.

Algorithmus 6 (Fixpunktverfahren):

1. Wähle ν_1 aus $L^2(\Omega)$, $\nu_1 > 0$.
2. Berechne $\nu_{k+1} = \Phi(\nu_k)$ für $k = 1, 2, \dots$

Nun stellt sich die Frage, ob und für welche Startwerte das Verfahren konvergiert. Es ist zu vermuten, dass sich in Analogie zu der L^2 -Norm-Aufgabe wieder die Eigenschaft ergibt, dass die Fixpunkte, welche die Komplementaritätsbedingung nicht erfüllen, abstoßend sind. Es ist allerdings schwierig, dies für diese Situation zu formulieren und zu beweisen. Weiterhin stellt sich auch die Frage nach einem Analogon zu Satz 3.6. Damit kann die Funktionstüchtigkeit des Fixpunktverfahrens nur in der Praxis untersucht werden.

Für die Diskretisierung der Aufgabe stellt sich nun die Frage, wie man $\|u(x, \cdot)\|_2$ diskretisieren kann. Bei der Diskretisierung mittels FEM mit einem irregulären Gitter gibt es keinen einfachen Ansatz und so wird vorgeschlagen, ein äquidistantes, quadratisches Gitter zu verwenden und die Differentialgleichung mittels Finiten Differenzen zu diskretisieren. Wir erhalten mit $h = \frac{1}{N}$ das Gitter

$$\Omega^{(h)} = \{0, h, 2h, \dots, 1\}^2$$

und für eine Funktion $u^{(h)} : \Omega^{(h)} \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\|u^{(h)}(x^{(h)}, \cdot)\|_2^{(h)} = \left(\sum_{y=0}^{1/h} u^{(h)}(x^{(h)}, h \cdot y)^2 \cdot h \right)^{\frac{1}{2}}$$

Wir wollen nun die Konvergenzeigenschaften untersuchen und verwenden die Parameter

$$\begin{aligned} \Omega &= [0, 1]^2 \\ y_d &= \frac{1}{6} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{2x} \\ u_a &= -30 \\ u_b &= 30 \\ \alpha &= 10^{-6} \\ \beta &= 10^{-3} \\ h_{max} &= 0.0625, \quad n = 225 \end{aligned}$$

und testen das Verfahren mit unterschiedlichen Startfunktionen ν_1 . Es wurde jeweils iteriert, bis ein ν mit $\|\nu - \Phi(\nu)\|_1 < 10^{-6}$ gefunden wurde. Auch hier wurden jeweils die Anzahl gelöster, großer Gleichungssysteme ausgewertet. Es ergab sich

ν_1	Komplementarität?	gelöste GS
1	ja	158
2	ja	159
3	ja	163
$1 + 1 \cdot x$	ja	158
$1 + 2 \cdot x$	ja	158
$1 + 3 \cdot x$	ja	160
10^{-2}	ja	155
10^{-3}	ja	147

Damit zeigt sich, dass auch bei kleinen Startwerten die Lösung nicht gegen den nahen Fixpunkt $\nu = 0$ strebt, sondern von diesem abgestoßen und gegen den richtigen Fixpunkt, der die Komplementaritätsbedingung erfüllt, konvergiert.

Das Ergebnis für $u^{(\nu)}$ ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

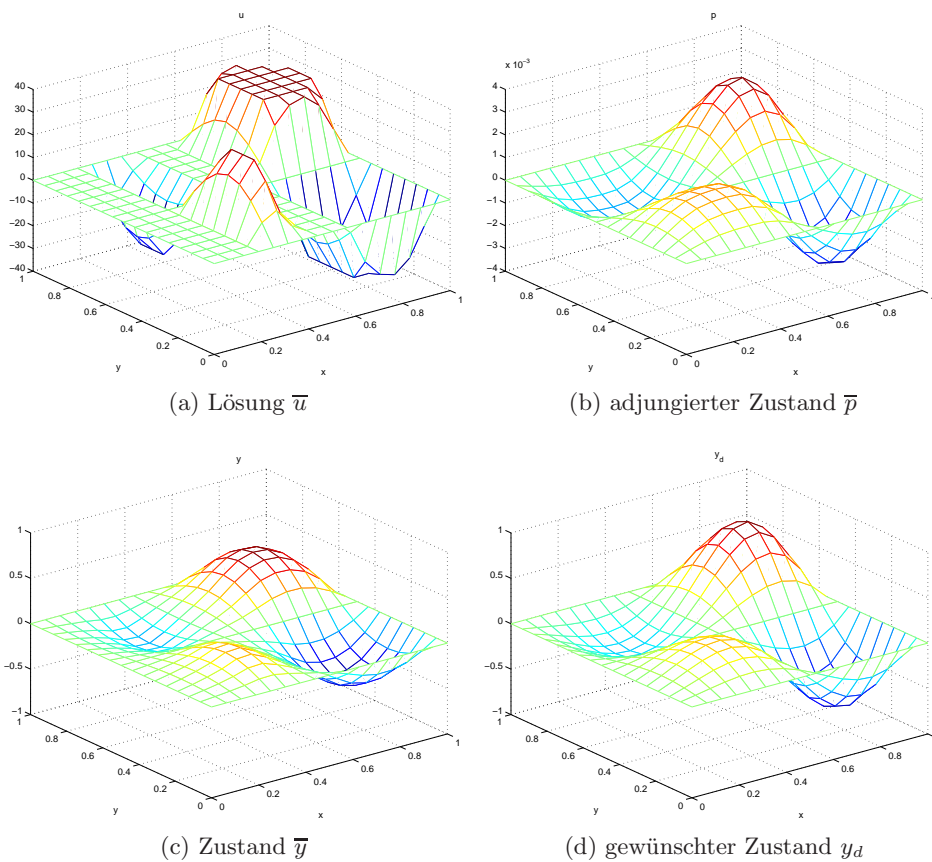


Abbildung 3.2: Lösung der Streifen Aufgabe

Diese Ergebnisse machen deutlich, dass das Fixpunktverfahren zwar die korrekten Ergebnisse liefert, aber insbesondere für feinere Netze zu viele Iterationen benötigt. Von daher wird versucht, auch das Newtonverfahren auf diese Aufgabe anzuwenden.

Um dies zu bewerkstelligen, müssen wir zuerst die Ableitung von Φ bestimmen. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass $\mu(\frac{\nu}{\alpha\nu+\beta} \cdot p \in \{u_a, u_b\}) = 0$ für alle iterierten adjungierten Zustände gilt. Wir erhalten damit aus [GGW08], dass die Ableitung von $u^{(\nu)}$ linear bezüglich der Richtung ν' ist. Bezeichnen wir die Ableitung in Richtung ν' mit $U\nu'$ so erhalten wir

$$(U\nu')(x, y) = \chi_A(x, y) \left[\frac{\beta \cdot \nu'(x)}{(\alpha\nu(x) + \beta)^2} p(x, y) - \frac{\nu(x)}{\alpha\nu(x) + \beta} (\mathcal{S}^* \mathcal{S} U\nu')(x, y) \right]$$

mit $A = \left\{ \frac{\nu}{\alpha\nu+\beta} \cdot p \in (u_a, u_b) \right\}$ und $p = \mathcal{S}^*(y_d - \mathcal{S}u^{(\nu)})$. Wollen wir nun für eine Richtung ν' diese Ableitung auswerten, so ist in der Numerik die Lösung eines Gleichungssystems mit $3n$ Unbekannten, wobei $n = (N - 1)^2$ die Anzahl innerer Punkte ist, erforderlich, um die Dünnbesetztheit der Matrizen zu erhalten.

Die Richtungsableitung von Φ bezeichnen wir mit $P\nu'$ und erhalten

$$(P\nu')(x) = \frac{\langle u^{(\nu)}(x, \cdot), (U\nu')(x, \cdot) \rangle}{\|u^{(\nu)}\|_2}.$$

P ist somit eine Abbildung von $L^2(\Omega_x)$ nach $L^2(\Omega_x)$.

Damit ergibt sich das Newtonverfahren.

Algorithmus 7 (Newtonverfahren):

1. Wähle großes $\nu_1 > 0$.
2. Setze $k \leftarrow 1$.
3. Berechne ν' mit $(P\nu' - \nu') = (\Phi(\nu_k) - \nu_k)$.
4. Setze $\nu_{k+1} = \nu_k - \nu'$.
5. $k \leftarrow k + 1$ und gehe zu 3.

In Schritt 3 hat man allerdings das Problem, dass man die Matrix P nicht direkt, sondern nur Vektormatrixmultiplikationen mit der Matrix berechnen kann. Diese benötigen, bei n inneren Punkten, jeweils die Lösung eines Gleichungssystems der Größe $3n$. Eine Möglichkeit ist nun Schritt 3 mittels des CG-Verfahrens approximativ zu lösen. Da die Matrix P aber nicht symmetrisch ist, muss man es vorher mit $(P + I)^T$ multiplizieren und so benötigt jeder Schritt des CG-Verfahrens zwei Vektormatrixmultiplikationen. Weiterhin wurde beobachtet, dass das CG-Verfahren in den ersten Schritten schlecht konvergiert und erst im letzten Schritt auf 0 springt. Von daher wird vorgeschlagen, P mit allen Einheitsvektoren (e_1, \dots, e_{N-1}) zu multiplizieren, um die Matrix P zu erhalten und dann das Gleichungssystem (der Größe $N - 1$) direkt zu lösen. Wie schon für die L^2 -Norm-Aufgabe schlagen wir vor, wieder mit $\nu_1(x) = \|\max(u_b, -u_a)(x, \cdot)\|_2 + 1$ zu

starten. Mit den Parametern

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 1]^2 \\ y_d &= \frac{1}{6} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{2x} \\ u_a &= -30 \\ u_b &= 30 \\ \alpha &= 5 \cdot 10^{-5} \\ \beta &= 10^{-3} \\ h_{max} &= 2^{-5}, n = 961\end{aligned}$$

erhalten wir

k	$\ \nu_k - \Phi(\nu_k)\ _1$
1	16.62328
2	1.130160
3	$1.454755 \cdot 10^{-1}$
4	$1.847482 \cdot 10^{-2}$
5	$2.565382 \cdot 10^{-3}$
6	$3.568331 \cdot 10^{-4}$
7	$2.256422 \cdot 10^{-5}$
8	$2.097653 \cdot 10^{-7}$
9	$2.376789 \cdot 10^{-11}$

wobei insgesamt 270 große Gleichungssysteme gelöst wurden, da in jedem Schritt zur Bestimmung der Matrix P $N - 1 = 2^{-5} - 1 = 31$ Gleichungssysteme gelöst werden mussten. In den letzten Schritten kann man auch gut die quadratische Konvergenz erkennen, allerdings benötigt das Newtonverfahren einige Schritte, um in den Konvergenzbereich mit der quadratischen Konvergenz zu kommen.

Mit diesen Parametern erhalten wir als Darstellung für $u^{(\nu)}$ Abbildung 3.3.

Wir setzen nun $\beta = 2.5 \cdot 10^{-3}$, um einen breiteren Streifen mit $u(x, \cdot) = 0$ zu erhalten. Mit diesen Parametern soll nun noch eine Vergleichsrechnung zwischen dem Fixpunkt- und dem Newtonverfahren durchgeführt werden. Es wird wieder iteriert, bis $\|\nu_k - \Phi(\nu_k)\|_1 < \varepsilon$ gilt. Wir erhalten für $h = 2^{-4}$ und $h = 2^{-5}$

h	2^{-4}		2^{-5}	
	Fixpunkt v.	Newton v.	Fixpunkt v.	Newton v.
10^{-1}	13	57	15	106
10^{-2}	25	74	29	140
10^{-3}	45	92	67	174
10^{-4}	68	92	179	208
10^{-5}	93	109	447	274
10^{-6}	129	109	994	307
10^{-8}	220	126	2226	340
10^{-10}	314	126	3529	373

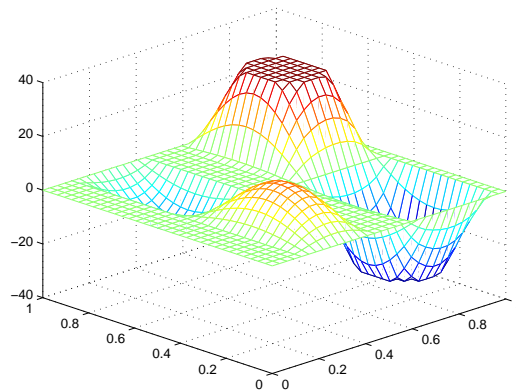


Abbildung 3.3: Lösung u der Streifenaufgabe

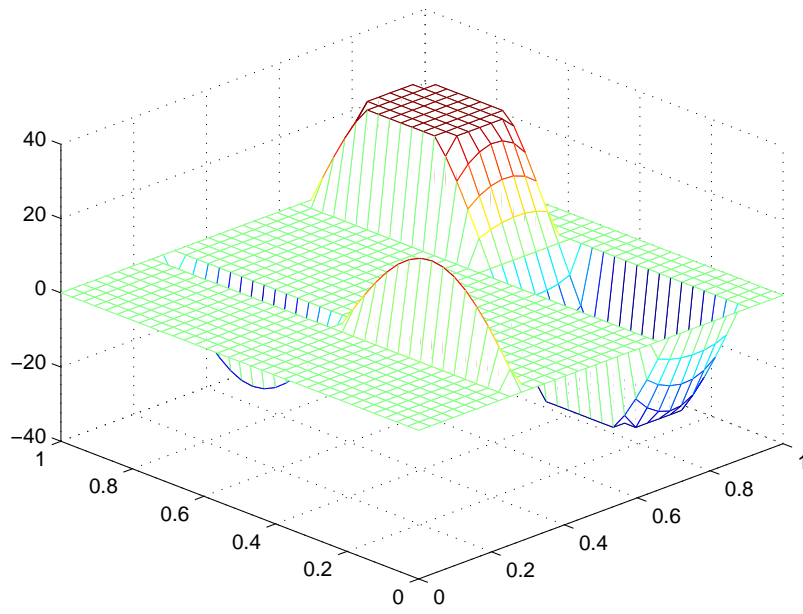
Damit zeigt sich, dass sich für das feinere Gitter die Iterationszahlen, wie erwartet, erhöhen. Weiterhin zeigt sich, dass für kleine ε das Fixpunktverfahren besser ist, da bei dem Newtonverfahren für jeden Schritt viele Gleichungssysteme gelöst werden müssen, um P zu berechnen.

Setzen wir nun $\alpha = 0$, so erhalten wir

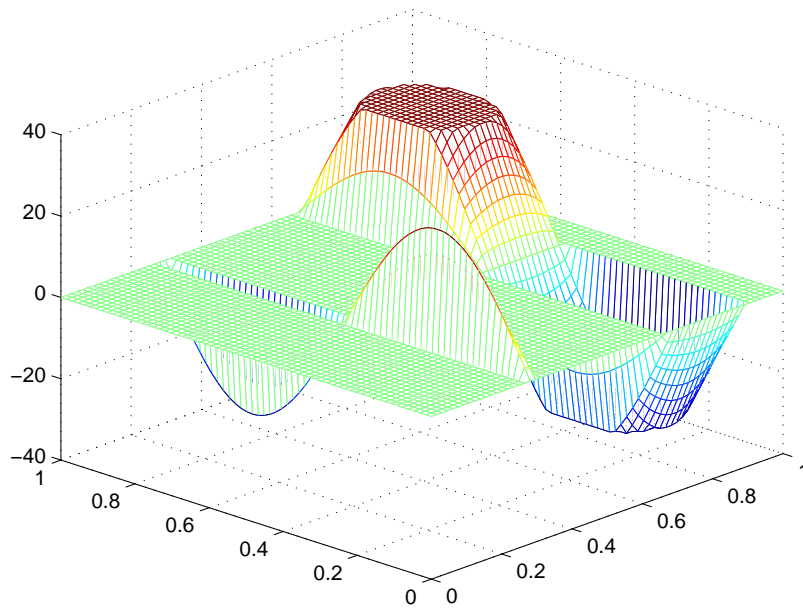
h	2^{-4}		2^{-5}	
	Fixpunkt v.	Newton v.	Fixpunkt v.	Newton v.
10^{-1}	14	60	17	106
10^{-2}	31	99	47	217
10^{-3}	167	116	254	395
10^{-4}	401	116	578	428
10^{-5}	667	116	913	461
10^{-6}	939	133	1248	461
10^{-7}	1210	133	1584	494
10^{-8}	1482	133	1919	494
10^{-9}	1754	150	2254	526
10^{-10}	2026	166	2590	526

Wie zu erwarten war, zeigt sich ein Anstieg der Iterationszahlen. Die Darstellung der Lösung für $\alpha = 0$ sehen wir in Abbildung 3.4.

Damit hat sich gezeigt, dass diese beiden Verfahren auch für das Funktional mit V -Norm in der Praxis funktionieren und dass die Lösung die gewünschte Eigenschaft hat, dass sie auf Streifen des Gebietes verschwindet.



(a) für $h = 2^{-5}$



(b) für $h = 2^{-6}$

Abbildung 3.4: Lösung u der Streifen Aufgabe, $\alpha = 0$

Notation

$\langle u, v \rangle$	L^2 -Skalarprodukt von $u, v \in L^2(\Omega)$: $\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} u \cdot v \, dx$
$\langle u, v \rangle_{p,q}$	Dualitätsklammer von $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: $\langle u, v \rangle_{p,q} := \int_{\Omega} u \cdot v \, dx$
$\langle u, v \rangle_{V,V^*}$	Dualitätsklammer von $u \in V$, $v \in V^*$: $\langle u, v \rangle_{V,V^*} := v(u)$
H	$H := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$
i	Einbettung von $L^1(\Omega)$ nach H^* : $\langle v, iu \rangle_{H,H^*} := \int u \cdot v \, dx$ für $u \in L^1$ und $v \in H$
i^*	Einbettung von H nach $L^\infty(\Omega)$: $\langle i^*v, u \rangle_{\infty,1} = \int u \cdot v \, dx = \langle v, iu \rangle_{H,H^*}$ für $u \in L^1$ und $v \in H$
μ	das Lebesguemaß auf \mathbb{R}^n
μ_1	das Lebesguemaß auf \mathbb{R}^1

Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung der Komplementaritätsbedingung $(\bar{u}, \bar{\mu}) \in K$	14
2.2	Darstellung der Komplementaritätsbedingung für (u_α, p_α)	16
2.3	Schätzungen für $u_{\alpha'}$ I	30
2.4	Schätzungen für $u_{\alpha'}$ II	31
2.5	Konvergenz von $u_\alpha, y_\alpha, p_\alpha$	33
2.6	Werte $\ F(u_\alpha)\ _2$	34
2.7	Darstellung von u_α für $\alpha = 10^{-10}$	35
3.1	Darstellung der Funktion Φ	41
3.2	Lösung der Streifenaufgabe	53
3.3	Lösung u der Streifenaufgabe	56
3.4	Lösung u der Streifenaufgabe, $\alpha = 0$	57

Literaturverzeichnis

- [Alt99] Hans Wilhelm ALT: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 1999. – Eine Anwendungsorientierte Einführung
- [Cas86] Eduardo CASAS: Control of an Elliptic Problem with Pointwise State Constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization* 24 (1986), Nr. 6, S. 1309–1318. <http://dx.doi.org/10.1137/0324078>. – DOI 10.1137/0324078
- [CNQ00] Xiaojun CHEN, Zuhair NASHED und Liqun QI: Smoothing Methods and Semismooth Methods for Nondifferentiable Operator Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38 (2000), Nr. 4, S. 1200–1216. <http://dx.doi.org/10.1137/S0036142999356719>. – DOI 10.1137/S0036142999356719
- [GGW08] Roland GRIESSE, Thomas GRUND und Daniel WACHSMUTH: Update Strategies for Perturbed Nonsmooth Equations. *Optimization Methods and Software* 23 (2008), Nr. 3, S. 321–343. <http://dx.doi.org/10.1080/10556780701523551>. – DOI 10.1080/10556780701523551
- [GS08] Roland GRIESSE und Georg STADLER: *Zielfunktional für Streifen*. 2008. – Persönliche Mitteilung
- [IT79] A. D. IOFFE und V. M. TICHOMIROV: *Theorie der Extremalwertaufgaben*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979
- [Sta08] Georg STADLER: Elliptic optimal control problems with L^1 -control cost and applications for the placement of control devices. *Computational Optimization and Applications* (2008). <http://dx.doi.org/10.1007/s10589-007-9150-9>. – DOI 10.1007/s10589-007-9150-9. – angenommen zur Veröffentlichung
- [Trö05] Fredi TRÖLTZSCH: *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen*. Vieweg Verlag, 2005. – Theorie, Verfahren und Anwendungen

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche wissentlich verwendete Textauschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Chemnitz, den 18. September 2008

Gerd Wachsmuth