Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Dr. A. Szkoła
J. Blechschmidt

26. Juni 2017

Stochastik

Übung 10: Stochastik mit Matlab

Hinweis: Bearbeite selbstständig die Aufgabenkomplexe in beliebiger Reihenfolge. Ziel soll es sein, für jeden Komplex ein Matlab-Skript, also eine Datei `komplex_#.m`, zu erstellen, in der alle gestellten Teilaufgaben bearbeitet werden. Dies vermeidet unnötige Eingaben, und sorgt außerdem dafür, dass die Schritte besser nachvollzogen werden können. Wer wenig Erfahrung mit Matlab oder Schwierigkeiten bei der Lösung der Fragen hat, kann die auf der Homepage zur Veranstaltung bereitgestellten *Templates* verwenden.

Aufgabe 1: Monte-Carlo-Methode

Löse folgende Aufgaben:

(a) Implementiere eine Methode, mit der man π nur mit Hilfe von gleichverteilten Zufallsvariablen auf $[0, 1]$ und der Tatsache, dass $\int_{\|x\|_2 \leq 1} 1 \,\mathrm{d}x = \pi$ gilt, approximieren kann.

(b) Die Funktion `fig.m`, die auf der Webseite zur Veranstaltung heruntergeladen werden kann, beschreibt eine mathematische Figur M in $[-1.5, 1.5]^3$.

Eingabe: Koordinaten x, y, z
Rückgabe: 1, falls $(x, y, z) \in M$, sonst 0.

Erweitere deine Funktion aus Teil (a), sodass Indikatorfunktionen $f(x) = 1_M(x)$ mit $\operatorname{supp} f \in [a, b]^n$ integriert werden können. Mit anderen Worten können damit Flächen, Volumina, etc. für Mengen $M \subset [a, b]^n$ approximiert werden. Teste deine Routine anhand der Datei `fig.m`.

(c) Stelle die Approximation des Volumens von M für $N_j = 2^j \cdot 100$ Realisierungen der Zufallsvariablen dar, $j = 0, 1, \ldots, 10$.

Hilfreiche Funktionen:

Aufgabe 2: Komplex — Approximation der Binomialverteilung

Wir haben in Vorlesung und Übung festgestellt, dass die Binomialverteilung für viele praktische Fragestellungen eine wichtige Rolle spielt, analytisch jedoch schwer zu handhaben ist. Aus diesem Grund wird die Binomialverteilung in der Praxis häufig durch

Funktion	Beschreibung
`rand`	Funktion zur Erzeugung gleichverteilter ZV auf [0,1]
`norm`	Funktion zur Berechnung der 2-Norm eines Vektors
`plot`	Plot-Funktion in 2d
`mean`	Berechnung des Mittelwerts eines Vektors

die Normalverteilung oder die Poissonverteilung approximiert. Wir wollen die Güte beider Approximationen anhand des Beispiels einer Qualitätsprüfung illustrieren. Anhand einer Entnahme von n Teilen fragen wir uns, wie groß die Wahrscheinlichkeit von weniger als k fehlerhaften Teilen ist, wenn jedes Teil mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ defekt ist. Es seien somit Y_i binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$.

Hinweis: Da nicht ausreichend Statistik-Toolboxen zur Verfügung stehen, können auf der Homepage zur Veranstaltung vereinfachte Routinen `myBinocdf.m`, `myNormcdf.m`, `myPoisscdf.m` heruntergeladen werden.

(a) Stelle die exakten Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Matlab-Funktion `binocdf` für $p = 0.02, 0.2, 0.5$ und geeignete Wahlen für Bereiche von $k = 1, \dots, n$ und $n = 1, \dots, 100$ dar.

(b) Die Approximation durch die Normalverteilung für eine binomialverteilte Zufallsvariable Y lautet (mit Korrektur)

$$P(a \leq Y \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - n\,p + 0.5}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\,p + 0.5}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Eine Faustregel besagt, dass diese Approximation im Allgemeinen für $n\,p\,(1-p) > 9$ gute Ergebnisse liefert. Vergleiche die Approximation mit den exakten Werten, überprüfe die Gültigkeit der Faustregel und illustriere die Ergebnisse

(c) Laut Faustregel lässt sich mit Hilfe der Poissonverteilung im Falle $n\,p < 10$ und $n > 1500\,p$ eine gute Approximation für die Binomialverteilung erzielen:

$$P(Y = k) \approx \mathrm{Poi}_{n\,p}(k).$$

Überprüfe auch diese Faustregel und illustriere die Ergebnisse.

Hilfreiche Funktionen:

Aufgabe 3: Komplex — Stochastische Prozesse

Seien $(X_i)_{i=1,\dots,N}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariable mit $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = -1) = 1 - p$ mit $p \in (0,1)$. Sei weiter $M_0 = 0$ und $M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Funktion	Beschreibung
`binocdf`	Kumulierte Verteilungsfunktion der Binomialverteilung
`poisscdf`	Kumulierte Verteilungsfunktion der Poissonverteilung
`normcdf`	Kumulierte Verteilungsfunktion der Normalverteilung
`surf,plot3`	Plot-Funktionen in 3d
`meshgrid`	Erzeugung von gleichmäßigen Gittern

(a) Illustriere 5 Pfade des stochastischen Prozesses M für $N = 100$ und verschiedene Werte von $p = 0.1, 0.25, 0.5$.

(b) Erstelle ein Histogramm der Verteilung von M_N für diese Werte von p durch Simulation einer ausreichend großen Anzahl von Pfaden. Gegen welche Verteilung strebt M_N für $N \to \infty$? Überprüfe deine Vermutung numerisch.

(c) Durch die Vorschrift

$$B_{i+1} = B_i + \xi_i$$

mit $B_0 = 0$ und $\xi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ wird ebenfalls ein stochastischer Prozess definiert. Simuliere auch für diesen Prozess 5 Pfade und erstelle ein Histogramm für B_{100}. Vergleiche die Ergebnisse mit dem Histogramm von M_{100} für $p = 0.5$.

Hilfreiche Funktionen:

Funktion	Beschreibung
`rand`	Funktion zur Erzeugung gleichverteilter ZV (auf $[0,1]$)
`randn`	Funktion zur Erzeugung standard-normalverteilter ZV
`plot`	Plot-Funktion in 2d
`histogram`	Funktion zur Erstellung von Histogrammen
`cumsum`	gibt für einen Vektor die kumulierten Werte zurück

Aufgabe 4: Verwerfungsmethode

Die *Verwerfungsmethode* (engl. rejection sampling) ist eine Methode zur Erzeugung von Zufallszahlen, die sich auf direkte Weise nicht einfach simulieren lassen.

Ziel: Simulation von Zufallsvariablen X mit Dichte f_X
Methode:

- Simulation einer Zufallsvariablen Y mit Dichte f_Y, wobei $f_X \leq c_Y \cdot f_Y$ mit $c_Y \geq 1$.
- Akzeptanz der Zufallsvariablen Y mit Wahrscheinlichkeit $\alpha = \frac{f_X(Y)}{c_Y\, f_Y(Y)} \leq 1$, d.h. mit Wahrscheinlichkeit α erhält man durch $X = Y$ eine Zufallsvariable für X, mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ wird der Schritt verworfen, und es muss eine neue Zufallsvariable Y gemäß f_Y gezogen werden.

Wir betrachten im Folgenden die Gleichverteilung auf der Einheitssphäre $\mathcal{S}^{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$. Dabei gelten folgende Aussagen, die wir an dieser Stelle nicht beweisen:

(i) Für einen n-dimensionalen Zufallsvektor X mit rotationsinvarianter Wahrscheinlichkeitsdichte f_X ist $\frac{X}{\|X\|_2}$ gleichverteilt auf der Einheitssphäre $\mathcal{S}^{n-1}$.

(ii) Ist $X = (X_1, X_2, X_3)$ gleichverteilt auf der Einheitsshäre $\mathcal{S}^2$ im $\mathbb{R}^3$, so ist X_i gleichverteilt auf $[-1, 1]$.

Löse folgende Aufgaben:

(a) Wie kann man die Gleichverteilung auf $\mathcal{S}^{n-1}$ mit Hilfe der Verwerfungsmethode simulieren?

(b) Wie kann man die Gleichverteilung auf $\mathcal{S}^{n-1}$ mit Hilfe der Standard-Normalverteilung direkt simulieren?

(c) Implementiere die Algorithmen und illustriere die Ergebnisse für $n = 2, 3$.

Hilfreiche Funktionen:

Funktion	Beschreibung
`rand`	Funktion zur Erzeugung gleichverteilter ZV auf [0,1]
`randn`	Funktion zur Erzeugung standard-normalverteilter ZV
`norm`	Funktion zur Berechnung der 2-Norm eines Vektors
`plot`	Plot-Funktion in 2d
`plot3`	Plot-Funktion in 3d