Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Dr. A. Szkoła
J. Blechschmidt

22. Juni 2017

Stochastik
Übung 9: Spiele und weitere Martingale

Aufgabe 1: Faires Spiel

Wir betrachten ein Spiel, bei dem der Spieler mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.05$ 10 Euro gewinnt, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p = 0.95$ seinen Einsatz in Höhe von 1 Euro verliert. Konstruiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem dieses Spiel fair ist.

Aufgabe 2: Ein weiteres Spiel

Wir betrachten ein Spiel, bei dem der Spieler 1 Euro mit Wahrscheinlichkeit α verliert, 1 Euro mit Wahrscheinlichkeit β gewinnt und mit Wahrscheinlichkeit γ sogar 2 Euro gewinnt. Beispielhaft betrachten wir $\alpha = 0.52$, $\beta = 0.45$ und $\gamma = 0.03$.

(a) Modelliere das Problem in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Berechne den Erwartungswert einer Runde des Spiels.

(b) Es beschreibe X_i den Gewinn oder Verlust des Spielers in der i-ten Runde des Spiels, und $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ den kumulierten Gewinn (bzw. Verlust) bis zur Zeit n. Finde ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $M_n = x^{S_n}$ ein Martingal ist.

(c) Es sei $p \in [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler mind. 100 Euro gewinnt, bevor er 100 Euro verloren hat. Bestimme (z. B. numerisch) Schranken p_0, p_1, sodass $p_0 \leq p \leq p_1$ gilt mit $p_1 - p_0 \leq 0.003$.

Aufgabe 3: Charakterisierungen von Martingalen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeige, dass dann folgende Bedingungen äquivalent sind:
   (i) $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_{t-1}) = M_{t-1}$ für alle $t = 1, \ldots, T$,
   (ii) $\mathbb{E}(\Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ für alle $t = 1, \ldots, T$, wobei $\Delta M_t = M_t - M_{t-1}$,
   (iii) $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$.

(b) Zeige, dass für ein Martingal M mit $M_t \in L^2(P), t = 0, \ldots, T$ folgende Aussage gilt:

$$\mathbb{E}\big[(M_t - M_s)^2\big] = \mathbb{E}\big[M_t^2 - M_s^2\big] \quad \text{für } 0 \leq s \leq t \leq T$$

Aufgabe 4: 2. Irrfahrt

Sei $T \in \mathbb{N}$ und X die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Wir betrachten den stochastischen Prozess ξ mit $\xi_1 = 1$ und $\xi_t = 2\,\xi_{t-1}\,1_{\{X_{t-1}<X_{t-2}\}}$ für $t = 2, \dots, T$. Berechne $G_t(\xi) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k\,(X_k - X_{k-1})$ für $k = 1, \dots, T$ sowie $\mathbb{E}(G_T(\xi))$ und $\mathrm{Var}(G_T(\xi))$.

Aufgabe 5: Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell stellt ein einfaches Aktienpreismodell dar. In diesem bezeichnet $A_0 > 0$ den Anfangskurs einer Aktie zum Zeitpunkt $t = 0$. Zu jedem Zeitpunkt $t = 1, 2, \dots$ kann sich der Wert der Aktie entweder erhöhen oder verringern. Seien dazu $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d. Zufallsvariable mit $P(Y_i = u) = p = 1 - P(Y_i = d)$, wobei $0 < d < 1 < u$ und $0 < \mathrm{p} < 1$. Der Wert der Aktie zum Zeitpunkt $t = n$ ist somit durch

$$A_n = A_0\,Y_1\,\dots\,Y_n.$$

(a) Bestimme den bedingten Erwartungswert von A_{n+1} bezüglich $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

(b) Unter welcher Bedingung ist der Wertverlauf der Aktie ein Martingal, Submartingal oder Supermartingal?