Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Dr. A. Szkoła
J. Blechschmidt

16. Juni 2017

Stochastik

Übung 8: Stochastische Prozesse in diskreter Zeit

Aufgabe 1: 1. Irrfahrt

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Verteilung

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

Weiter seien $S_0 \in \mathbb{Z}$ fest, und $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$. Wir definieren mit $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Zeit, bis S_n das erste mal A oder $-B$ erreicht für $A, B \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\tau = \min\big\{n \geq 0 \,:\, S_n = A \text{ oder } S_n = B\big\}.$$

(a) Zeige, dass

$$P(S_n \text{ erreicht } A \text{ bevor es } B \text{ erreicht} \mid S_0 = 0) = \frac{B}{A+B}.$$

(b) Zeige, dass $\mathbb{E}[\tau^d] < \infty$ für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. alle Momente von τ sind endlich.

(c) Zeige, dass $\mathbb{E}\big[\tau \mid S_0 = 0\big] = A\,B$.

(d) Was ändert sich an den Aussagen (a) und (c), falls jetzt $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = -1) = q = 1 - p$ gilt?

(e) Berechne mit Hilfe der obigen Aussagen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler, der mit Wahrscheinlichkeit p einen Euro gewinnt und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ einen Euro verliert, 100 Euro gewinnt, bevor er 100 Euro verliert für $p \in \{0.5, 0.495, 0.49, 0.47\}$. Gib auch die erwartete Dauer des Spiels an.

Aufgabe 2: Beispiel für ein Martingal

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i) = 0$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$, $M_0 = 0$ und $M_n = S_n^2 - n\,\sigma^2$ mit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Zeige, dass M_n ein Martingal bezüglich der durch die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugten σ-Algebra ist.

Aufgabe 3: Martingaltransformation

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, P)$ ein filtrierter Raum. Eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen wird *vorhersagbarer Prozess* genannt, falls $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für ein Martingal (M_n) und einen vorhersagbaren Prozess (A_n) definieren wir den Prozess $(\widetilde{M}_n)$ durch $\widetilde{M}_0 = M_0$ und

$$\widetilde{M}_n = M_0 + A_1(M_1 - M_0) + A_2(M_2 - M_1) + \ldots + A_n(M_n - M_{n-1}).$$

Dieser Prozess heißt die *Martingaltransformation* von $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweise folgende Aussage: Ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein vorhersagbarer Prozess bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_i \in L^1(\Omega)$, so ist die Martingaltransformation von $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls ein Martingal.

Aufgabe 4: Stoppzeiten

Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ wird *Stoppzeit* bezüglich der *Filtration* $(\mathcal{F}_i)_{i\in N_0}$ genannt, falls

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweise folgende Aussage: Ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und τ eine Stoppzeit, so ist der *gestoppte Prozess* $(M_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Es gilt die Notation $n \wedge \tau = \min\{n, \tau\}$ sowie $n \vee \tau = \max\{n, \tau\}$.