Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Dr. A. Szkoła
J. Blechschmidt

7. Juni 2017

Stochastik

Übung 7: Poisson-Approximation, Bedingte Erwartung

Aufgabe 1: Poisson-Approximation der Binomialverteilung I

Es seien $\lambda > 0$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$ mit $n\,p_n \to \lambda$. Zeige, dass dann der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_{n,p_n}(\{k\}) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

für jedes $k \geq 0$ existiert. Dabei bezeichnet $\mathcal{B}_{n,p_n}(\{k\})$ die Binomialverteilung.

Aufgabe 2: Poisson-Approximation der Binomialverteilung II

Zeige, dass für $p \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\|\mathcal{B}_{n,p} - \mathcal{P}_{n\,p}\| = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{B}_{n,p}(\{k\}) - \mathcal{P}_{n\,p}(\{k\})| \leq 2\,n\,p^2$$

gilt, wobei $\mathcal{B}_{n,p}$ die Binomialverteilung und $\mathcal{P}_{n\,p}$ die Poissonverteilung bezeichnet.

Aufgabe 3: Anwendung der Poisson-Approximation

Eine Spezies zeugt $n = 1000$ Nachkommen, von denen alle unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = 0.001$ (bzw. $p_2 = 0.005$, $p_3 = 0.01$) 10 Tage überleben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als $m_1 = 1$ (bzw. $m_2 = 2$, $m_3 = 5$) davon 10 Tage überleben?

(a) Bestimme die exakte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Tabelle 1.

(b) Approximiere die Wahrscheinlichkeit durch die Poisson-Verteilung.

Aufgabe 4: Poisson-Approximation der Binomialverteilung III

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ betrachte man eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, die identisch Bernoulli-verteilt sind zum Parameter $p = \frac{\lambda}{n}$, wobei $\lambda > 0$. Zeige mit Hilfe der charakteristischen Funktion, dass die Verteilung von $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ schwach gegen die Poisson-Verteilung zum Parameter λ konvergiert.

m	p		
	0,001	0,005	0,01
0	0,36770	0,00665	0,00004
1	0,73576	0,04009	0,00048
2	0,91979	0,12402	0,00268
3	0,98107	0,26432	0,01007
4	0,99636	0,44005	0,02869
5	0,99941	0,61596	0,06614
6	0,99992	0,76255	0,12888
7	0,99999	0,86715	0,21886
8	1	0,93240	0,33169
9	1	0,96853	0,45730
10	1	0,98653	0,58304

Tabelle 1: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 1000$.

Aufgabe 5: L^2-Projektion

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine sub-σ-Algebra, und $X \in L^2(\mathcal{A})$. Zeige, dass $\widetilde{X} = \mathbb{E}\big[X|\mathcal{F}\big]$ die orthogonale Projektion von X auf $L^2(\mathcal{F})$ ist.