Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Dr. A. Szkoła
J. Blechschmidt

17. Mai 2017

Stochastik

Übung 6: Monte-Carlo-Methode, Zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 1: Verteilung der Summe von Zufallsvariablen II

Seien X und Y unabh. Zufallsvariablen. Bestimme die Verteilung von $Z = X + Y$, falls X und Y mit den Parametern (μ_1, σ_1^2) und (μ_2, σ_2^2) normalverteilt sind.

Aufgabe 2: Würfelspiel I

Anton und Berta spielen ein Spiel. Sie werfen abwechselnd ein Paar Würfel. Berta gewinnt, wenn die Augensumme ihres Wurfs 6 ist, und keiner bereits vorher gewonnen hat. Anton gewinnt, wenn die Augensumme seines Wurfs 7 beträgt, und keiner schon vorher gewonnen hat. Wie lauten die Gewinnwahrscheinlichkeiten für beide, wenn Berta beginnen darf?

Aufgabe 3: Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ eine numerische Zufallsvariable und $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ die zugehörige Verteilungsfunktion. Dabei sei $\overline{\mathbb{R}}$ mit der Borel-σ-Algebra ausgestattet. Beachte, dass das Maß $P_X : \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \to [0,1]$ eindeutig durch $P_X([-\infty, c]) = P(X \leq c)$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ festgelegt ist. Beweise folgende Eigenschaften:

(a) F_X ist monoton wachsend.

(b) F_X ist rechtsstetig, d.h. $\lim_{y \searrow x} F_X(y) = F_X(x)$.

(c) $F_X(x) - \lim_{y \nearrow x} F_X(y) = P_X(\{x\})$.

(d) F_X ist stetig im Punkt $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P_X(\{x\}) = 0$.

(e) Ist X P-fast sicher reellwertig, also $P(X \in \mathbb{R}) = 1$, dann gilt $\lim_{x \searrow -\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x \nearrow \infty} F_X(x) = 1$.

Aufgabe 4: Verteilung der Summe normalverteilter Zufallsvariablen

Seien $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ i.i.d. für $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass dann $S_n = X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{N}(0, n)$ gilt.

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsdichten

Zeige oder widerlege, dass folgende Funktionen Wahrscheinlichkeitsdichten beschreiben. Skizziere zusätzlich den Graph der jeweiligen Funktion.

(a) $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - |1-x|$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\beta}{\pi\,(\beta^2 + (x-\alpha)^2)}$, wobei $\beta > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2\sigma}\, e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}$, wobei $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$.

(d) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0.25\, x\, e^{-x^2}$

Aufgabe 6: Gleichmäßige Konvergenz von Verteilungsfunktionen

Seien $F, F_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $n \in \mathbb{N}$ Verteilungsfunktionen, F stetig und

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Zeige, dass dann $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig gegen F konvergiert. Gilt die Aussage (1) auch noch, wenn wir die Stetigkeit von F nicht mehr fordern.

Aufgabe 7: Abschätzung für charakteristische Funktion

Seien μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ und Φ dessen charakteristische Funktion. Zeige, dass dann

$$|\Phi(t) - \Phi(s)|^2 \leq 2\Big(1 - \mathrm{Re}\big(\Phi(t-s)\big)\Big) \quad \text{für alle } s,t \in \mathbb{R}$$

gilt.

Aufgabe 8: Erste Schätzer

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge reellwertiger Zufallsvariablen mit Mittelwert μ und Varianz σ^2. Weiter definieren wir

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N} (X_n - \hat{\mu}_N)^2 \quad \text{und} \quad \hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n.$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n-\mu)^2 - \frac{N}{N-1}(\mu - \hat{\mu}_N)^2$,

(b) $\mathbb{E}\big[\hat{\sigma}_N^2\big] = \sigma^2$, d.h. $\hat{\sigma}_N^2$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2,

(c) $\hat{\sigma}_N^2 \to \sigma^2$ P-fast sicher für $N \to \infty$.

Aufgabe 9: Monte Carlo-Methode

Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses $\{X \leq c\}$ für ein bestimmtes $c \in \mathbb{R}$ mittels Monte Carlo-Simulation von X schätzen.

(a) Gib den entsprechenden Monte Carlo-Schätzer an.

(b) Gib eine a priori-Abschätzung für die nötige Anzahl N der Samples an, damit die Standardabweichung des Monte Carlo-Fehlers zur Berechnung von $P(X \leq c)$ kleiner oder gleich ε ist.

(c) Wie ändert sich die Abschätzung, wenn die Standardabweichung kleiner gleich $\varepsilon\, P(X \leq c)$ sein soll?