Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Dr. A. Szkoła
J. Blechschmidt

10. Mai 2017

Stochastik

Übung 5: Erzeugte σ-Algebren, Unabhängigkeit von ZV, Cauchy-Verteilung

---

Aufgabe 1: Von ZV erzeugte σ-Algebren

Wir betrachten als Zufallsexperiment das zweimalige Werfen einer Münze. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 geben an, ob beim ersten bzw. zweiten Wurf Kopf ($X_i = 1$) oder Zahl gefallen ist ($X_i = -1$).

(a) Bestimme die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}_1$, bezüglich derer X_1 messbar ist, also $\sigma(X_1)$.

(b) Bestimme die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}_2$, bezüglich derer X_2 messbar ist, also $\sigma(X_2)$.

(c) Bestimme die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}_+$, bezüglich derer $X_1 + X_2$ messbar ist, also $\sigma(X_1 + X_2)$.

(d) Bestimme die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}_*$, bezüglich derer $X_1 \cdot X_2$ messbar ist, also $\sigma(X_1 \cdot X_2)$.

Aufgabe 2: Maximum gleichverteilter ZV

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch gleichverteilte ZV auf $[a, b]$ mit $a < b$.

(a) Bestimme die Verteilungsfunktion von $Z_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

(b) Wie groß muss $n \in \mathbb{N}$ sein, damit $P(Z_n > a + 0.9\,(b - a)) \geq 0.99$ ist?

Aufgabe 3: Summe und Produkte unabhängiger ZV

Seien X, Y und Z reellwertige, unabhängige Zufallsvariablen. Zeige oder wiederlege folgende Aussagen:

(a) Die Zufallsvariablen $X + Y$ und Z sind unabhängig.

(b) Die Zufallsvariablen $X\,Y$ und Z sind unabhängig.

(c) Falls $Y > 0$, so sind die Zufallsvariablen $\frac{X}{Y}$ und Z unabhängig.

Aufgabe 4: Darstellung des Erwartungswerts

Sei X eine beliebige Zufallsvariable mit Werten in $[0, \infty)$. Zeige, dass dann

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty P(X \geq x) \, \mathrm{d}x$$

gilt. Beachte, dass wir die Integrierbarkeit von X nicht vorausgesetzt haben.

Aufgabe 5: Cauchy-Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi \, (1 + x^2)}$$

heißt (Standard-)Cauchy-verteilt. Skizziere die Dichte, bestimme die Verteilungsfunktion und zeige, dass $X \notin L^1$ gilt.