Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Dr. A. Szkoła
J. Blechschmidt

3. Mai 2017

Stochastik

Übung 4: Konvergenz, Borel-Cantelli-Lemma, GGZ

Aufgabe 1:

Sei Ω eine überabzählbare Menge und

$$\mathcal{A} = \{A \in \Omega \mid A \text{ höchstens abzählbar oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\}$$

ein Mengensystem. Weiter sei

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ höchstens abzählbar ist,} \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ höchstens abzählbar ist.} \end{cases}$$

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum?

Aufgabe 2: Münzwurf I

Eine Münze fällt mit Wahrscheinlichkeit $p < 0.5$ auf „Zahl" und wird wiederholt geworfen. Sei A_k für $k \in \mathbb{N}$ das Ereignis, dass bei den Würfen $2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1$ mindestens k mal **in Folge** „Zahl" fällt. Zeige, dass

$$P\big(\{A_k \text{ tritt für unendlich viele } k \text{ ein}\}\big) = 0.$$

gilt.
Hinweis: Definiere dazu Zufallsvariablen X_j, die angeben, ob im j-ten Wurf Zahl gefallen ist und Ereignisse $B_k^j = \{X_j = 1, X_{j+1} = 1, \ldots, X_{j+k-1} = 1\}$.

Aufgabe 3: Münzwurf II

Eine Münze fällt mit Wahrscheinlichkeit $p \geq 0.5$ auf „Zahl" und wird wiederholt geworfen. Sei A_k für $k \in \mathbb{N}$ das Ereignis, dass bei den Würfen $2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1$ mindestens k mal **in Folge** „Zahl" fällt. Zeige, dass

$$P\big(\{A_k \text{ tritt für unendlich viele } k \text{ ein}\}\big) = 1.$$

gilt.
Hinweis: Definiere dazu Zufallsvariablen X_j, die angeben, ob im j-ten Wurf Zahl gefallen ist und Ereignisse $C_k^i = \{X_j = 1 \text{ für alle } j = 2^k + i\,k, 2^k + i\,k + 1, \ldots, 2^k + i\,k + k - 1\}$ und $k \in \mathbb{N}$ sowie $i \in 0, \ldots, \lfloor 2^k/k - 1 \rfloor$.

Aufgabe 4: Konvergenz von unabh. exponentialverteilten ZV

Seien $X_1, X_2, \ldots \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ i.i.d. mit Parameter $\lambda > 0$. Zeige, dass P-fast sicher

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = \lambda^{-1}$$

gilt.

Aufgabe 5: Münzwurf III

Eine Münze fällt mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ auf „Zahl“ und wird wiederholt geworfen. Es seien K_n und Z_n die Anzahl von „Köpfen“ und „Zahlen“ bei den ersten n Würfen. Zeige unter Verwendung des schwachen Gesetzes der großen Zahlen, dass für $\varepsilon > 0$

$$P\Big(2p - 1 - \varepsilon \le \frac{Z_n - K_n}{n} \le 2p - 1 + \varepsilon\Big) = 1$$

gilt.

Aufgabe 6: Zusammenhang der Hypergeometrischen Verteilung zur Binomialverteilung

In einer Urne befinden sich insgesamt N Kugeln, wovon K schwarz sind, die anderen weiß. Wir ziehen n Kugeln ohne Zurücklegen, wobei $n \le \min\{K, N-K\}$ ist. Beschreibe dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und zeige, dass für $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Wahrscheinlichkeit, k schwarze Kugeln in einer Stichprobe zu ziehen, durch

$$P(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

beschrieben ist. Diese Gewichte definieren die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, K und n. Zeige nun, dass diese Verteilung für $N, K \to \infty$ mit $p = K/N$ gegen die Binomialverteilung mit den Parametern n und p konvergiert.