Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Dr. A. Szkoła
J. Blechschmidt

26. April 2017

Stochastik

Übung 3: Unabhängigkeit von ZV, Erwartungswert, Varianz

Wichtige Begriffe

- Unabhängigkeit von Zufallsvariablen
- Erwartungswert, Varianz, Kovarianz

Aufgabe 1: Unabhängige Ereignisse

Seien $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ unabhängige Ereignisse einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Zeige, dass

(a) A_1 und A_2^c unabhängig sind,

(b) A_1^c und A_2^c unabhängig sind.

Zusatz: Zeige für die Familien von Ereignissen $\{A_i\}_{i\in I}$ und $\{B_i\}_{i\in I}$ mit $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ die Äquivalenz von:

(i) Die Familie $\{A_i\}_{i\in I}$ ist unabhängig.

(ii) Die Familie $\{B_i\}_{i\in I}$ ist unabhängig.

Damit gilt insbesondere für beliebige disjunkte Teilmengen $I, J \in \{1, 2, \dots, n\}$ die folgende Beziehung

$$P\left(\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} A_j^c\right)\right) = \prod_{i\in I} P(A_i) \prod_{j\in J} P(A_j^c)$$

Aufgabe 2: Überbuchungswahrscheinlichkeit

Fluggesellschaften haben festgestellt, dass 10% der Passagiere, die ein Ticket gekauft haben, den Flug nicht antreten. Daher verkaufen viele Airlines mehr Tickets, als Plätze zur Verfügung stehen. Berechne die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung, wenn für ein Flugzeug mit N Sitzen $N + k$ Tickets verkauft werden. Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich für $N = 95$ und $k = 5$?

Aufgabe 3: Gleichverteilung für Permutationen

Wir betrachten die Gleichverteilung auf der Menge Ω der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Für eine Permution $\omega \in \Omega$ bezeichne $X(\omega)$ die Anzahl der Fixpunkte. Berechne den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 4: Exponentialverteilung

Die stetige Zufallsvariable X mit Parameter $\lambda > 0$ heißt **exponentialverteilt**, wenn sie die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

(a) Bestimme die Verteilungsfunktion $F_X(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y$ einer exponentialverteilten ZV X und skizziere diese sowie die Dichte.

(b) Berechne Erwartungswert und Varianz von X.

(c) Zeige, dass für eine exponentialverteilte ZV die Beziehung

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

für alle $s, t > 0$ gilt. Interpretiere die Gleichung.

(d) Seien n unabhängige und identisch verteilte ZV (kurz i.i.d.) mit $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ für $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Bestimme die Verteilung von $Z_n := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Aufgabe 5: Schon wieder im Park verirrt

Du hast dich schon wieder in dem großen Park aus Aufgabe 7, Übungsblatt 2, verirrt und weißt nicht mehr, in welcher Richtung (Osten oder Westen) der Ausgang liegt. Da du schon einmal da warst, gehst du davon aus, dass sich der Ausgang mit Wahrscheinlichkeit p im Osten und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ im Westen befindet. Um deine Vorahnung zu bestätigen, befragst du einen Passanten. Dieser kennt sich mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/3$ gut aus, und antwortet mit 75% Wahrscheinlichkeit richtig, oder er antwortet immer falsch (also wie in Aufg. 7, ÜB 2).

(a) Du fragst einen Passanten einmal nach dem Weg. Wie ändert sich deine Einschätzung über die Wahrscheinlichkeit, in welcher Richtung der Ausgang liegt?

(b) Du befragst denselben Passanten nochmals und er bleibt bei seiner Antwort. Wie ändert sich deine Einschätzung?

(c) Was ändert sich an deiner Einschätzung, wenn der Passant dreimal dieselbe Antwort gibt?