Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Dr. A. Szkoła
J. Blechschmidt

19. April 2017

# Stochastik

## Übung 2: Verteilungen, Jensensche Ungleichung, Bedingte Wahrscheinlichkeit

**W**ichtige Begriffe

- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes
- Binomialverteilung, Poisson-Verteilung, Normalverteilung, Hypergeometrische Verteilungen

### Aufgabe 1: Bedingte $\sigma$-Algebra

Sei $\Omega$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$ und $C \in \mathcal{A}$. Zeige, dass $\mathcal{A}_C = \{C \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ eine $\sigma$-Algebra über $C$ ist.

### Aufgabe 2: Jensensche Ungleichung

Folgere aus der Jensenschen Ungleichung, dass für konvexe Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$ offen die Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, f(x_i)$$

für endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ folgt. Gilt diese Aussage auch für beliebige Intervalle $I \subset \mathbb{R}$?

### Aufgabe 3: Negative Binomialverteilung

Seien $r \in \mathbb{N}_0$ und $p \in (0,1)$ gegeben. Zeige, dass durch

$$P(\{k\}) = \binom{k+r-1}{k} p^r \, (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert ist.

**Aufgabe 4: Verteilung der Summe von Zufallsvariablen**

Seien $X$ und $Y$ unabh. Zufallsvariablen. Bestimme die Verteilung von $Z = X + Y$, falls

(a) $X$ und $Y$ mit den Parametern $\lambda$ und $\mu$ Poisson-verteilt sind,

(b) $X$ und $Y$ mit den Parametern $(n_1, p)$ und $(n_2, p)$ binomialverteilt sind,

(c) $X$ und $Y$ mit den Parametern $(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $(\mu_2, \sigma_2^2)$ normalverteilt sind.

**Aufgabe 5: Rekurrenzbedingung der Poisson-Verteilung**

Zeige, dass für die Poisson-Verteilung $P_\lambda(k) = e^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$ die Rekurrenzbedingung gilt:

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda}{k}\,P_\lambda(k-1).$$

**Aufgabe 6: Krankenversicherung**

Eine Krankenversicherung ermittelte, dass bei Verkehrsunfällen von PKW-Fahrern, die angegurtet waren, 8% schwere Kopfverletzungen aufwiesen. Bei nicht angeschnallten Fahrern trugen 62% keine schwere Kopfverletzungen davon. Trotz Anschnallpflicht legen immer noch schätzungsweise 15% aller Autofahrer keinen Gurt an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein nach einem Unfall ins Krankenhaus eingelieferter Fahrer mit schwerer Kopfverletzung keinen Gurt angelegt hatte?

**Aufgabe 7: Verirrt im Park**

Du hast dich in einem großen Park verirrt und möchtest wissen, in welche Richtung (Osten oder Westen) der Ausgang ist. Von den Besuchern des Parks kennen sich zwei Drittel gut aus und antworten auf die Frage nach dem Ausgang zu 75% richtig. Das restliche Drittel irrt sich immer (es antwortet also stets falsch). Alle Besucher sind sich jedoch unsicher und ändern ihre Meinung, sodass es dazu kommt, dass die Antworten ein und desselben Besuchers bei mehrmaligem Nachfragen unabhängig voneinander sind.

(a) Du fragst eine Person, in welcher Richtung der Ausgang liegt und bekommst als Antwort „Osten“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtig ist?

(b) Du fragst dieselbe Person nochmals und bekommst dieselbe Antwort, also „Osten“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nun, dass im Osten der Ausgang ist?

(c) Du fragst dieselbe Person nochmals und bekommst wieder die Antwort „Osten“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nun, dass im Osten der Ausgang ist?

(d) Zeige, dass nach einer vierten Befragung mit dem Ergebnis „Osten“ die Antwort mit Wahrscheinlichkeit 27/70 richtig ist.

(e) Was wäre, wenn die Person beim 4. Versuch „Westen“ geantwortet hätte?