
Stochastik

Übung 1: Einführung, Grundbegriffe der Stochastik

Wichtige Begriffe

- Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) , Wahrscheinlichkeitsmaß
- Laplace-Raum, Laplace-Experiment

Aufgabe 0: Wiederholung Begriff σ -Algebra

Es seien \mathcal{A} eine σ -Algebra und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$. Zeige:

- (a) $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$,
- (b) $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 1: Durch Ereignisse erzeugte σ -Algebra

Seien (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B und C paarweise disjunkte Ereignisse mit $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.25$ und $P(C) = 0.35$. Bestimme die durch $\{A, B, C\}$ erzeugte σ -Algebra, d. h. die kleinste σ -Algebra, die A, B und C enthält. Berechne die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse dieser σ -Algebra.

Aufgabe 2: Formel von Poincaré-Sylvester

Zeige, dass für jeden Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Ereignissen $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ die Formel von Poincaré-Sylvester

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right)$$

gilt.

Aufgabe 3: Erinnerungsfoto

Vier befreundete Paare wollen zum Abschluss eines Treffens ein Erinnerungsfoto machen. Angenommen, die 8 Personen stellen sich vollkommen zufällig nebeneinander auf.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Partner nebeneinander stehen?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass niemand neben seinem Partner steht?

Aufgabe 4: Geburtstagsparadoxon

Es sei p_n die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit n Studenten wenigstens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Wir nehmen an, dass kein Student am 29. Februar Geburtstag hat, also gehen wir von $m = 365$ Tagen aus, an denen die Studenten mit gleicher Wahrscheinlichkeit (unabhängig voneinander) Geburtstag haben. Zeige, dass die Abschätzung

$$p_n \geq 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{730}}$$

gilt und gib ein möglichst kleines $n \geq 0$ an, für das $p_n \geq 0.5$ gilt.