TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 11. Juli 2016
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2016

9. Übung: Die Kollokationsmethode

Hinweis: Es können auch nur Teilaufgaben (allerdings mindestens 2) vorbereitet und vorgeführt werden.

Aufgabe 1

Wir wollen die volle-Tensor-Kollokation in MATLAB implementieren, d.h., wir möchten den Quadraturoperator

$$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{p}} = \bigotimes_{i=1}^{d} \mathcal{Q}_{p_i}^{(i)}, \qquad \mathcal{Q}_{p_i}^{(i)} f = \sum_{k=1}^{1+p_i} w_k^{(i)} \, f\left(x_k^{(i)}\right)$$

implementieren, wobei $\mathcal{Q}_{p_i}^{(i)}$ eindimensionale Gauss-Quadraturoperatoren mit Gewichten $w_k^{(i)}$ und Knoten $x_k^{(i)}$ seien. Schreiben Sie dazu eine MATLAB -Routine

```
[X,w] = FullGridSC(d, p, s)
```

wobei

- `d` die Anzahl der Zufallsvariablen ist,
- `p` ein d-dimensionaler Vektor aus natürlichen Zahlen, welcher den gewünschten Polynomgrad in jede Dimension beinhaltet,
- `s` ein d-dimensionales cell-array aus Strings, welches pro Zelle entweder "legendre" oder "hermite" beinhaltet und damit angibt, welche Quadraturknoten und -gewichte in der jeweiligen Dimension genutzt werden sollen,
- `X` das reultierende Gitter aus den d-dimensionalen Kollokationsknoten und `w` die entsprechenden Quadraturgewichte sind.

Hinweis: Nutzen Sie zur Kollokation die zur Verfügung gestellten Routinen `legendre` und `hermite`, welche Knoten und Gewichte für eine Gauss-Quadratur bzgl. Gleichverteilungs- bzw. Normalverteilungsdichte berechnen!

Aufgabe 2

Wir erinnern uns an Aufgabe 3 des 2. Übungsblattes:

Berechnen Sie mittels Monte Carlo Simulation die durchschnittliche Fläche A_μ eines zufälligen Dreiecks, dessen Eckpunkte einer Gleichverteilung auf dem Einheitsquadrat folgen.

(a) Berechnen Sie A_μ mittels Kollokation bzw. Gaußquadratur. Nutzen Sie Polynome vom Grad $p = 0, \ldots, 4$ für jede der sechs stochastischen Variablen. Stellen Sie den Fehler der Kollokation bzw. Quadratur wieder in Abhängigkeit von der Anzahl der Kollokationsknoten $N_p = (1+p)^6$ in einem log-log-Plot dar!

Hinweis: Es gilt $A_\mu = 11/144$.

(b) Berechnen Sie A_μ mittels Monte Carlo Simulation. Verwenden Sie $M = N_p = (1+p)^6$, $p = 0, \ldots, 4$, Realisierungen und führen Sie für jedes M 5 Simulationen durch. Stellen Sie deren Fehler in Abhängigkeit von M im selben log-log-Plot wie bei Teilaufgabe (a) dar!

(c) Was stellen Sie fest? Erklären Sie ihre Beobachtung! Was ändert sich, wenn wir uns für den Durchschnittswert des Quadrates des Flächeninhaltes interessieren würden?

Hinweis: Der exakte Erwartugnswert ist hier $3/288$.

Aufgabe 3

Wir betrachten folgendes zufälliges Variationsproblem auf $D = [0,1]^2$:

$$\int_D \nabla u(x,y,\boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla v(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_D f(x,y,\boldsymbol{\xi})\,v(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \quad \forall v \in H_0^1(D)$$
$$u(x,y,\boldsymbol{\xi})\big|_{\partial D} = g(x,y,\boldsymbol{\xi})\big|_{\partial D}$$

mit

$$g(x,y,\boldsymbol{\xi}) = \sin(\xi_1 + x + y),$$
$$f(x,\boldsymbol{\xi}) = -\exp(\xi_2)\ (1 + \xi_3 \sin(\pi x) + \xi_4 \cos(\pi y))$$

und $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ mit $\xi_1 \sim U(0,1)$, $\xi_2, \xi_3, \xi_4 \sim N(0,1)$ unabhängig.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}u(x)$ mittels eines deterministischen Variationsproblems. Nutzen Sie die `fem2d_lin`-Routinen und eine Triangulierung mit $n = 101$ Gitterpunkten pro Richtung.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}u(x) \approx \mathbf{E}u_{\boldsymbol{p}}(x)$ mittels stochastischer Kollokation. Nutzen Sie Polynome vom Grad $p = 0, \ldots, 4$ für jeweils jede Variable $\xi_1, \ldots, \xi_4$. Stellen Sie das Verhalten des Fehlers $\|\mathbf{E}u(x) - \mathbf{E}u_p(x)\|_{H^1(D)}$ in Abhängigkeit von der Anzahl der Kollokationsknoten $N_p = (1+p)^4$ in einem log-log-Plot dar!

Hinweis: Nutzen Sie zur Fehlerberechnung das Ergebnis aus (a)!

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}u(x) \approx \mathbf{E}u_M(x)$ mittels Monte Carlo Simulation. Verwenden Sie $M = N_p = (1+p)^4$, $p = 0, \ldots, 4$, Realisierungen. Führen Sie für jedes M 5 Simulationen durch und stellen Sie das Verhalten des Fehlers $\|\mathbf{E}u(x) - \mathbf{E}u_M(x)\|_{H^1(D)}$ in Abhängigkeit von M im selben log-log-Plot wie bei Teilaufgabe (b) dar!

Hinweis: Nutzen Sie zur Fehlerberechnung erneut das Ergebnis aus (a)!