

## Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2016

### 8. Übung: Numerische Berechnung der Karhunen-Loève Entwicklung

*Hinweis:* Es können auch nur Teilaufgaben (allerdings mindestens 2) vorbereitet und vorgeführt werden.

#### Aufgabe 1

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $a(x, \omega) : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein Zufallsfeld zweiter Ordnung mit Mittelwert 0 und stetiger Kovarianzfunktion  $c(x, y) : D^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Die Karhunen-Loève Entwicklung (KLE) von  $a$  kann numerisch mit einem Galerkin-Verfahren berechnet werden. Dazu wird die Eigenwertgleichung des Kovarianzoperators  $C$  von  $a$  mit  $v \in V_N$  aus dem endlich-dimensionalen Galerkinraum  $V_N$  getestet:

$$\langle C\phi, v \rangle = \lambda \langle \phi, v \rangle \quad \forall v \in V_N, \quad (1)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Innenprodukt des entsprechenden Funktionenraumes – hier  $L^2(D)$  – bezeichne.

- (a) Setzt man für die Eigenfunktionen  $\phi \in V_N$  an, so führt (1) auf ein verallgemeinertes lineares Eigenwertproblem für die Basiskoeffizienten  $u$  der Eigenfunktion  $\phi$  bzgl. einer Basis  $\{v_1, \dots, v_N\}$  von  $V_N$ :

$$Au = \lambda Mu, \quad u \in \mathbb{R}^N. \quad (2)$$

Wie sehen die Komponenten von  $A$  und  $M$  aus?

- (b) Wir möchten nun eine Galerkin-Methode zur Berechnung der KLE eines Zufallsfeldes  $a$  auf  $D = [0, 1]$  in MATLAB implementieren. Dies soll in Form einer Funktion

$$[\Lambda, \Phi] = \text{ComputeKL1D}(c, N)$$

geschehen, wobei

- $N + 1$  die Größe des Galerkinraumes und  $c$  ein Funktionshandle für die Kovarianzfunktion  $c$  sein soll, welches auch vektorwertige Auswertung von  $c$  erlaubt,
- $\Lambda$  der Spaltenvektor der  $N$  **abfallenden** Eigenwerte und  $\Phi$  die Matrix der spaltenweisen Basiskoeffizientenvektoren der entsprechenden **normierten** Eigenfunktionen im Galerkinraum sein soll.

Als Galerkinraum  $V_{N+1}$  nutzen wir den Raum der stückweise linearen Funktionen für eine gleichmäßige Zerlegung von  $D = [0, 1]$  in  $N$  Teilintervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $x_i = i/N$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

Weiterhin wollen wir als Quadraturformel in  $D^2 = [0, 1]^2$  eine Tensorversion der zusammengesetzten Trapezregel mit den Stützstellen  $\{x_i\}_{i=0}^N$  verwenden:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy \approx & \frac{1}{N^2} \left( \frac{1}{4} f(0, 0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i, 0) + \frac{1}{4} f(1, 0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} f(1, x_i) \right. \\ & + \frac{1}{4} f(1, 1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i, 1) + \frac{1}{4} f(0, 1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} f(0, x_i) \\ & \left. + \sum_{i,j=1}^{N-1} f(x_i, x_j) \right). \end{aligned}$$

Implementieren Sie die Funktion `ComputeKL1D` in MATLAB und testen Sie Ihre Implementierung an  $c(x, y) = \min(x, y) - xy$  (siehe vorherige Übung).

*Hinweis 1:* Die gewählte Quadraturformel ermöglicht ein schnelles, schleifenloses Assemblieren von  $A$  in (2).

*Hinweis 2:* Die Einträge der Massenmatrix  $M$  in (2) können im Vorfeld exakt berechnet werden.

*Hinweis 3:* Nutzen Sie die MATLAB-Routine `eig` zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung.

## **Aufgabe 2**

Wir betrachten nun drei Kovarianzfunktionen  $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  der Matérn-Familie:

$$\begin{aligned}c_{1,R}(x, y) &= \exp\left(-\frac{|x - y|}{R}\right), \\c_{2,R}(x, y) &= \left(1 + \frac{\sqrt{3}|x - y|}{R}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3}|x - y|}{R}\right), \\c_{3,R}(x, y) &= \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{R}\right).\end{aligned}$$

Der Korrelationslängenparameter  $R$  sei zunächst  $R = 1$ .

- Erzeugen Sie Realisierungen eines Gaußfeldes  $G$  mit Mittelwert 0 und Kovarianzfunktion  $c_{1,R}$ ,  $c_{2,R}$  bzw.  $c_{3,R}$ ,  $R = 1$ .  
Generieren Sie dazu Realisierungen von  $G$  an den Diskretisierungspunkten  $x_i = i/N$ ,  $i = 0, \dots, 1000$ .
- Berechnen Sie die KLE der drei Kovarianzfunktionen mittels `ComputeKL1D(c, N)` aus Aufgabe 1 mit  $N = 1000$  und vergleichen Sie das Verhalten der Eigenwerte in einem log-log-Plot.
- Wiederholen Sie (a) und (b) für  $R = 0.1$  und  $R = 0.01$ . Was beobachten Sie?